Le bouquet[1]

Groupe fonction

Mots-clés : Fonction, trinôme du second degré, équation du second degré, racine carrée, mise en équation

Le problème

Il s'agit de trouver le nombre n tel que $2n(n-1) = 2244$ dans un contexte de collecte entre élèves exigeant des conversions d'euros en centimes.

Le bouquet
Dans la classe de Sandra, les élèves apprécient beaucoup leur professeur de mathématiques. Ils ont décidé de lui offrir un bouquet de fleurs pour la fête de Noël.
Chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
Sandra a réuni les cotisations et fait le compte de ce qu'elle a reçu. Non compris sa propre contribution, elle a 22 euros et 44 centimes.
Combien y a-t-il d'élèves dans la classe ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Avant tout, interpréter correctement l'énoncé. Il s'avère que c'est la difficulté de lecture de l'énoncé qui a empêché de nombreux élèves de poser les bons calculs.

Calculer la cotisation qui serait obtenue pour différents effectifs n d'élèves par le produit de ce que chacun donne ($2n$) multiplié par le nombre d'élèves ($n-1$), jusqu'à trouver, par essais successifs, 2244 centimes. On trouve ainsi $n = 34$.

Ou, interpréter l'énoncé sous forme algébrique : si n est le nombre d'élèves dans la classe, Sandra a reçu $2n\,(n-1)$ centimes d'euros. L'équation $2n\,(n-1) = 2244$, avec n entier, a pour solution 34.

- Pour résoudre cette équation, on peut procéder par quelques essais successifs, sachant que n est un nombre entier, à partir de $n(n-1) = 1122$.

- On peut (en cat 10 ?), utiliser la formule générale de résolution de l'équation du deuxième degré après avoir simplifié par 2 : $n\,(n-1) = 1122$ ou $n^2 - n - 1122 = 0 \Rightarrow n = 1+ (\sqrt{1+4488}/2)$ (l'autre racine n'est pas acceptable parce qu'elle est négative).

- Sans recourir à la formule générale on peut encore remarquer que $2(n-1)^2 < 2n(n-1) < 2n^2$. En utilisant les racines carrées on a donc : $n-1 < \sqrt{1122} < n$. Comme $\sqrt{1122} \approx 33{,}5$, on a $n = 34$.

Résultats

Sur 1181 classes (de 21 sections) ayant participé à l'épreuve I du 17e RMT on obtient :

[1] Problème 15 de l'épreuve I du 17e rallye, de catégories 7 à 10.

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb classes*	*m*
Catégorie 7	334	49	54	55	40	532	0,91
Catégorie 8	182	46	46	62	68	404	1,48
Catégorie 9	51	15	30	20	21	137	1,60
Catégorie 10	29	7	24	17	31	108	2,13
Ensemble	596	117	154	154	160	1181	1,29

Selon les critères de l'analyse a priori du problème :

4 Réponse exacte (34 élèves) avec une démarche raisonnée pour trouver
3 Réponse exacte obtenue par essais non organisés
2 Réponse exacte sans explication
1 Réponse erronée, mais début correct de démarche
0 Pas de réponse

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Ici, pas d'« obstacle » au sens de la didactique, mais lecture difficile et mauvaise compréhension de l'énoncé.

La relative complexité de l'énoncé n'a pas permis à certains élève de s'approprier la situation, donc de résoudre le problème.

Nous constatons que ce problème n'a pas été traité dans un cadre algébrique. En catégorie 7 et 8 ce n'est pas étonnant, ça l'est d'avantage en cat 9 où les élèves étudient des fonctions et apprennent à « mettre en équation » des problèmes dans des contextes divers. Et même en cat 10, à peine plus du quart des élèves écrit la bonne équation.

Procédures et erreurs qui ont pu être identifiées :

Catégorie	Procédures	Erreurs
7 et 8	- par essais - utilisation d'une inconnue - écriture d'une équation - recherche des diviseurs de 2244	Comprennent que chaque élève donne 2 centimes Trouvent 22, 33, 17 ou 11
9	- par essais - utilisation d'une inconnue - écriture d'une équation	Comprennent que chaque élève donne 2 centimes
10	- par essais - utilisation d'une inconnue - écriture d'une équation - calcul de la racine carrée de 1122	Comprennent que chaque élève donne 2 centimes

En catégories 7 et 8, 249 copies ont été analysées :

- 7 % utilisent une « inconnue » (*n* le nombre d'élèves) sans expliciter ce qu'elle désigne, mais seulement 2 % écrivent une équation exacte.
- 31 % procèdent par essais (le plus souvent non organisés) pour trouver le bon résultat, dont les deux tiers ne font que « vérifier » que 34 est bien le nombre d'élèves.
- 16 % n'ont rien écrit.
- 9 % font explicitement comme si chaque élève donnait 2 centimes.
- Plusieurs trouvent 22, 33, 17 ou 11 en cherchant des diviseurs de 2244.

En catégorie 9, 88 copies ont été analysées :

- 15 % utilisent une inconnue mais seulement 9% écrivent une équation exacte et aucune ne résout l'équation.
- 45 % procèdent par essais (dont on ne voit pas souvent trace) pour trouver le bon résultat
- 25 % n'écrivent rien ou des choses incompréhensibles
- Aucune n'envisage le calcul de la racine carrée de 1122
- 8% ont compris que chaque élève donnait 2 centimes

En catégorie 10, 71 copies ont été analysées :

- 44 % utilisent une inconnue, 29 % écrivent la bonne équation, et 18 % savent la résoudre.
- 38 % procèdent par essais.
- 10 % calculent la racine carrée de 1122
- 5 % n'écrivent rien et 5 % ont compris que chaque élève donnait 2 centimes

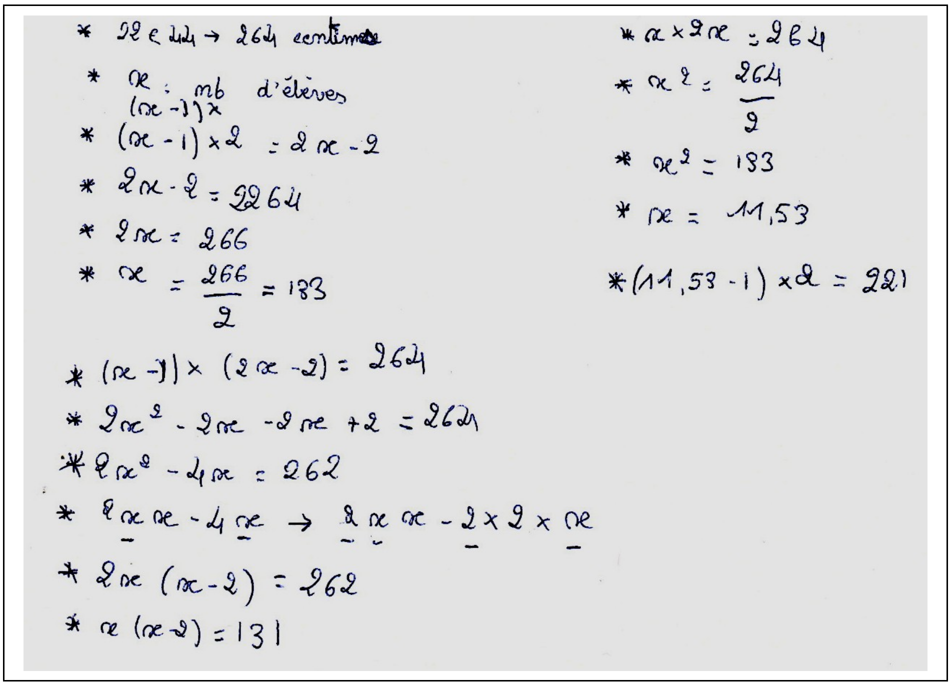
La non réussite est due en partie, surtout en cat 7 et 8, à une incompréhension ou une mauvaise interprétation de l'énoncé (« autant de fois 2 centimes que … »)

Exploitations didactiques

Dans le cadre d'une expérimentation hors rallye dans 8 classes, une de cat. 8, cinq de cat. 9 et deux de cat. 10, ce problème a été proposé avec une question supplémentaire, dont l'objectif était d'inciter les élèves à se placer dans le cadre algébrique :

« Écrivez les calculs à faire pour trouver le nombre des élèves de la classe ».

Mais là encore, 1 seule copie de catégories 9 et 3 de catégorie 10 écrivent des équations (fausses en raison d'une mauvais interprétation de l'énoncé !) (figure 1).


* 22 c 44 → 264 centimes
* x : nb d'élèves
$(x-1)x$
* $(x-1)\times 2 = 2x-2$
* $2x-2 = 2264$
* $2x = 266$
* $x = \frac{266}{2} = 133$
* $(x-1)\times(2x-2) = 264$
* $2x^2 - 2x - 2x + 2 = 264$
* $2x^2 - 4x = 262$
* $2xx - 4x \rightarrow 2xx - 2\times 2\times x$
* $2x(x-2) = 262$
* $x(x-2) = 131$

* $x \times 2x = 264$
* $x^2 = \frac{264}{2}$
* $x^2 = 133$
* $x = 11{,}53$
* $(11{,}53-1)\times 2 = 221$

fig 1. Copie avec équations

Dans deux copies on a décelé l'idée de fonction, dans son registre « objet-image » comme dans celle de catégorie 10 (figure 2) et celle de catégorie 9 (figure 3). Dans la classe de cette dernière l'utilisation d'un tableur de l'ordinateur semblait assez familière (mais les titres de deux colonnes sont erronés).

On a essayé avec plusieurs nombres d'élèves:

1 élève → 2c
2 élèves → 8c
3 élèves → 18c
4 élèves → 32c
5 élèves → 50c
6 élèves → 72c
20 élèves → 8,00 €
30 élèves → 18,00 €
35 élèves → 24,50 €
40 élèves → 32 €
50 élèves → 50 €

La formule pour trouver le nombre d'élèves :
$x \times x \times 2$ ou $2x^2$
x = nombre d'élève

$\cancel{22,44} = x \times x \times 2 = 2244 + (2x)$

Il y a 34 élèves dans la classe.

la cotisation est de 68 centime

fig 2. Idée de fonction (cat 9)

nombre d'élève	Sandra	Argent donné par élève	somme totale
21	0,42	8,82	9,24
22	0,44	9,68	10,12
23	0,46	10,58	11,04
24	0,48	11,52	12
25	0,5	12,5	13
26	0,52	13,52	14,04
27	0,54	14,58	15,12
28	0,56	15,68	16,24
29	0,58	16,82	17,4
30	0,6	18	18,6
31	0,62	19,22	19,84
32	0,64	20,48	21,12
33	0,66	21,78	22,44
34	0,68	23,12	23,8
35	0,7	24,5	25,2
36	0,72	25,92	26,64
37	0,74	27,38	28,12
38	0,76	28,88	29,64
39	0,78	30,42	31,2
40	0,8	32	32,8

fig 3. Idée de fonction (cat 10)

Pour aller plus loin

Dans la rubrique : procédures, obstacles et erreurs rencontrées, voici un peu plus en détails une analyse du contenu de quelques copies de catégories 7 et 8.

Procédures observées

Au niveau 7 (62 copies étudiées) :
- 3 utilisent une inconnue et écrivent la bonne équations : $2X(X-1) = 2244$ même si elles n'explicitent pas « on appelle X … », montrant par là un début de maîtrise de la notion de fonction, puis :

    L'une cherche 2 nombres consécutifs dont le produit est 1122
    Une deuxième fait le « bon essai » dans son équation,
    La troisième fait 6 essais organisés dans un tableau

- 6 font au moins deux essais « raisonnés »
- 9 « vérifient » seulement que 34 est le nombre d'élèves cherché
- 3 cherchent à trouver comme cotisation de chacun un nombre entier. Par exemple : En divisant 2244 par des nombres possibles d'élèves « on a trouvé 22 et 33 »

Au niveau 8 (77 copies étudiées) :
- 14 utilisent une inconnue même s'ils n'explicitent pas « on appelle X … », ou calculent une racine carrée:

    une seule écrit la bonne équation puis « vérifie » que 34 convient
    une autre calcule la racine carrée de 1122 puis essaie ensuite 32 x 33 et 33 × 34
    12 écrivent $2X^2$ au lieu de $2X(X-1)$ et/ou calculent la racine carrée de 1122, d'où les « arrondis » 33 ou 34 de 33,5 ou de 33,496, quand ils donnent un résultat.

- 11 copies font au moins deux essais « raisonnés »
- 9 copies « vérifient » seulement que 34 est le nombre d'élèves.
- 3 copies cherchent à trouver comme cotisation de chacun ou comme nombre d'élèves un nombre entier. L'une divise 22,44 par 1,02 ; 0,51 ; 2,04 ; 0,68 ; 0,66 ; 0,44 et trouve les entiers 22, 44, 11, 33, 34, 51 et conclut : il y a trop d'élèves dans une classe ou pas assez. Une autre divise 2244 par 2, 11, 22, 44, 66, 132 et retient le dernier résultat : 17 élèves. Une autre divise 2244 par 30, 45, 34, 33, et retient 34 après vérification.

Principales erreurs rencontrées autres que celles énumérées dans les procédures:

Au niveau 7 (62 copies)
- 10 copies ont compris : « chaque élève donne 2 centimes » d'où des réponses aberrantes

    a) qui ne les étonnent pas : 112, 1122 ou d'autres
    b) qu'ils trafiquent pour trouver un nombre raisonnable : « 1122 centimes »
    ou 1122 : 50 = 22,44 : 22 = 25 élèves. (744, 713)
    c) ou qui les étonnent

- 14 copies intègrent (explicitement) la contribution de Sandra dans les 22,44. Les uns écrivent 34 ξ 0,66 = 22,44 … et donnent la bonne réponse ! D'autres : « entre 33 et 34 élèves », ou encore: « 33,5 élèves car (2 ξ 33,5) ξ 33,5 = 2244,5 c'est bizarre qu'il y a une moitié d'élève »
- 10 copies trouvent 11 ou 22 ou 102 élèves, car :
    dans 6 copies : 22 ξ 1,02 = 22,44
    dans 3 copies : 11 ξ 2,04 = 22,44
    dans 1 copie : 102 ξ 0,22 = 22,44
- 14 copies présentent des erreurs non identifiables :
- 1 copie « vérifie » qu'il y a 36 élèves : « 35 ξ 35 ξ 2 = 24,50 et 35 + 1 = 36 ».
- 13 relèvent de «l' âge du capitaine » comme « 22,44 : 11,22 = 2 centimes, d'où 11 élèves ».

« 11 élèves car 11 ξ 2 ξ 11 = 22,22. 0,11 ξ 2 = 0,22 ; 22,22 + 0,22 = 22,44 ».
« 0,44 ξ 2 = 0,88 ; 22 44 :0,88 = 25 ; il y a 25 élèves ».
- 3 copies trouvent 33 avec : « 22 : 2 = 11 ; 44 :22 = 22 ; 22 +11 = 33 ».
- 1 copie trouve 52 él. : « 44 ξ 22 élèves = 968 ; 968 ξ 2 = 1936 ; 1936 + 7 ξ 44 = 2244 ; 51+1 = 52 ».
- Une autre écrit : « 44 : 2 = 22 ; 44 : 11 = 4 ; donc 4 élèves qui donnent 44 centimes ».
- Et enfin: « 17 élèves car 22,44 : 17 = 0,19 »…

Au niveau 8
- 12 copies ont compris : « chaque élève donne 2 centimes » d'où des réponses aberrantes
    a) qui ne les étonnent pas : 112, 1122 ou d'autres (5 copies)
    b) qu'ils trafiquent pour trouver un nombre raisonnable : 2244 : 2 = 1122 ; 1122 : 3 = 374 ; donc 22,44 : 3,74 = 6 élèves
    aucune copie ne s'étonne de ces résultats
- 20 copies intègrent (explicitement) la contribution de Sandra dans les 22,44
- 5 trouvent quand même 34 élèves car 34 ξ 0,66 = 22,44
- une réponse : « entre 21 et 23 élèves car 2 ξ 33 ξ 33 = 21,78 et 2 ξ 34 ξ 34 = 23,02 »
- une autre : « 33 ξ 2 ξ 33 = 2178 ; 2244 – 2178 = 66 ; donc 33 élèves »
- 5 copies trouvent 11 (ou 12), 22 (ou 23 élèves), car : « 22 ξ 1,02 = 22,44 »
- 7 copies relèvent de « l'âge du capitaine »: par exemple
    « 22 : 2 = 11 ; 44 : 22 = 22 ; 22 + 11 = 33 ».
    et encore : « 48 ξ 48 = 2304 ; 2304 – 2244 = 56 ; 56 : 2 = 28, Il y a 28 élèves ».
    et enfin : « 2244 : 110 = 20 élèves »

La grande majorité des élèves à tous niveaux procèdent par essais, la plupart du temps désordonnés (à ce qu'il nous semble à la lecture des copies) mais parfois organisés (figure 4).

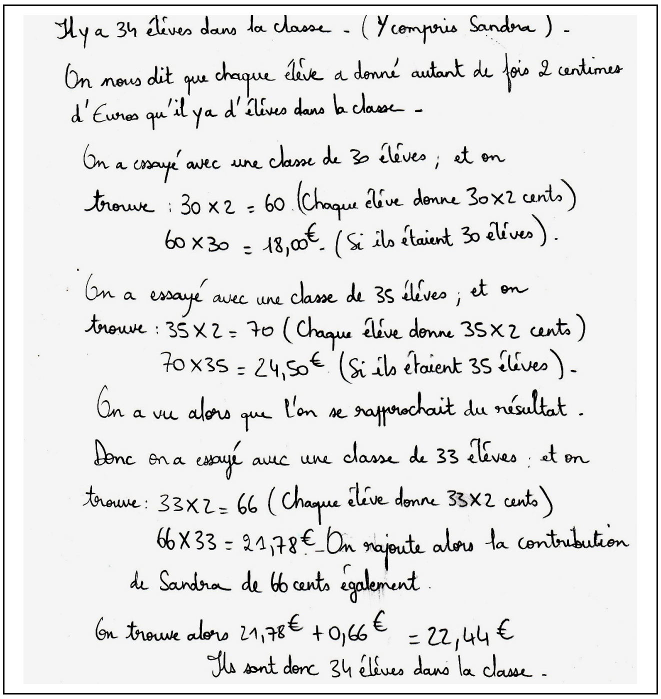

Il y a 34 élèves dans la classe. (Y compris Sandra).
On nous dit que chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
On a essayé avec une classe de 30 élèves ; et on trouve : 30 x 2 = 60 (Chaque élève donne 30 x 2 cents)
60 x 30 = 18,00€. (Si ils étaient 30 élèves).
On a essayé avec une classe de 35 élèves ; et on trouve : 35 x 2 = 70 (Chaque élève donne 35 x 2 cents)
70 x 35 = 24,50€ (Si ils étaient 35 élèves).
On a vu alors que l'on se rapprochait du résultat.
Donc on a essayé avec une classe de 33 élèves ; et on trouve : 33 x 2 = 66 (Chaque élève donne 33 x 2 cents)
66 x 33 = 21,78€. On rajoute alors la contribution de Sandra de 66 cents également.
On trouve alors 21,78€ + 0,66€ = 22,44€
Ils sont donc 34 élèves dans la classe.

fig 4. Essais

A propos de la notion de fonction
- La notion de fonction est d'abord implicitement présente par l'introduction d'une inconnue identifiée par une lettre, avant qu'elle puisse, suivant le contexte du problème, acquérir le statut de variable. La résolution d'une équation est donc un précurseur à la notion de fonction,

si elle est explicitement interprétée par une question du type : « parmi toutes les valeurs que peut prendre *n* (ou *x*), quelle est celle (ou sont celles) qui satisfait aux conditions du problème ? »

- Établir une relation entre variables au sein d'une formule est aussi un précurseur de l'idée de fonction. Cette formule étant associée à une condition (par exemple = 0), les élèves peuvent l'interpréter en termes de relation objet-image par : « parmi toutes les valeurs que l'on obtient par ce calcul à partir de celles de *n* (ou *x*), y en a t-il qui vérifient la condition ? »

- Dans ce problème 15 du bouquet, dans certaines copies les élèves ont pensé à la racine carrée comme opération inverse du carré, manifestant ainsi la présence de l'idée de fonction.

- La notion de fonction a été tardivement dégagée dans l'histoire des mathématiques (Leibniz), d'abord comprise comme des formules reliant des variables, d'autres modes de représentation ont suivi (algorithmes, tableaux, graphiques…). La notion de fonction prendra son véritable statut quand les élèves pourront passer d'un registre de représentation à un autre. Les analyses des problèmes de rallyes montrent la difficulté de ce passage conceptuel qui se construit tout au long des études secondaires.

Bibliographie

Henry, M. Le concept de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 6, Parma 2006. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, ARMT, 2007, p. 151-168.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.