

La décoration de Charles

Identification

Rallye : 23.I.9

Catégories : 5, 6, 7

Domaine conceptuel: Géométrie, Fonctions :

Familles de tâches : Prolongation d'une frise et calcul des éléments du motif répété.

Résumé

Déterminer l'aire de la partie grise du dessin d'une frise, donnée par les dessins sur papier quadrillé du début et de la fin de la décoration et par la mesure de l'aire totale de la partie blanche.

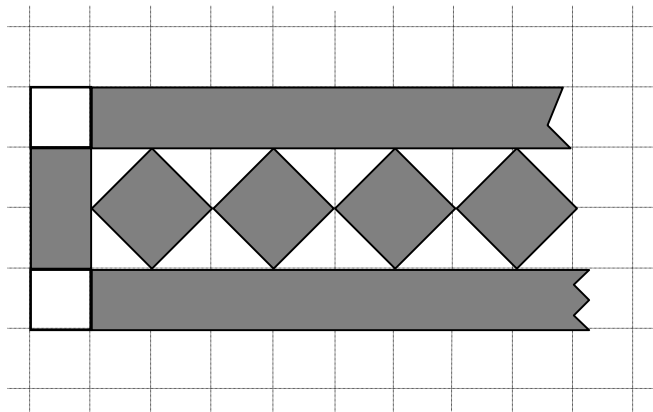
Énoncé du problème

Charles peint une décoration sur une feuille de papier quadrillé.

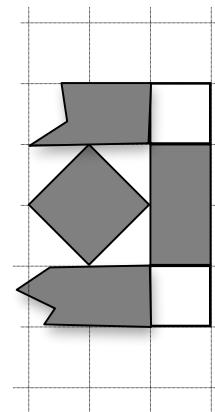
Il commence par une bande verticale faite de deux carreaux laissés en blanc qui encadrent un rectangle de deux carreaux gris.

Il continue avec un motif qui est toujours le même : deux bandes horizontales grises qui bordent une file de carrés gris, alignés par leurs sommets. Les espaces entre les parties grises sont laissés en blanc.

Voici le début de la décoration, à gauche :



et voici la fin, à droite :



La décoration se termine, à droite, par une bande verticale de quatre carreaux, identique à la bande, de gauche.

Sur la décoration entière, l'aire de la partie laissée en blanc est de 68 carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris. (Prenez comme unité d'aire un carré du quadrillage.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Comprendre ce que représente la partie dessinée

- Lire le texte et observer les deux dessins : comprendre que le premier dessin montre le début de la décoration, le second la fin.
- Considérer le réseau quadrillé comme un support pour le dessin, et pas comme une partie de la décoration.
- Comprendre que l'espace vide entre les deux dessins ne correspond pas à la partie de la décoration qui manque, mais que la taille de la décoration est en relation avec la donnée du texte : « 68 carreaux de la décoration sont blancs ».

Analyser les dessins

- Voir la décoration comme un rectangle à deux couleurs : grise et blanche : l'aire de la partie blanche est donnée, il faut trouver celle de la grise.

Ou bien,

- Trouver des régularités pour décrire la frise centrale (la décoration sans les deux colonnes extrêmes).
A. Se rendre compte que les deux colonnes (de largeur un carré) à l'extrémité droite et gauche de la décoration encadrent une frise centrale construite avec un motif qui se répète.

Étude [23.I.9] La décoration de Charles

B. Voir dans la frise centrale une juxtaposition de bandes verticales :



1) Ce motif peut être vu comme un rectangle de largeur une colonne du quadrillage associé au rectangle symétrique (par déduction 64 motifs).



2) On peut voir un motif rectangulaire de largeur deux colonnes du quadrillage (avec un carré gris central) qui se répète (par déduction 32 motifs).

C. Voir dans la frise centrale une juxtaposition de trois bandes horizontales de la longueur de la frise (C'est cette décomposition qui figure dans le texte).



- Une bande supérieure de largeur un carreau et toute grise.



- Une bande inférieure (identique) de largeur un carreau et tout grise.



- Une bande médiane de largeur deux carreaux dans laquelle des carrés gris se détachent sur fonds blanc.

Trouver les aires en s'appuyant sur l'analyse des dessins

- Se centrer sur la frise centrale : 68 carreaux blancs pour la décoration, c'est 64 carreaux pour la frise centrale.
- Paver les figures avec soit avec un carreau, soit avec le triangle demi-carreau et en déduire la mesure de l'aire en carreaux (ou en triangles) OU calculer les aires en dénombrant les unités d'aire (soit celle d'un carreau, soit celle d'un triangle demi-carreau, soit les deux).
- Calculer l'aire totale de la décoration (un rectangle dont il faut déduire la longueur en carreaux) et soustraire celle de la partie blanche : aire totale de la décoration 66×4 ; donc aire de la partie grise $264 - 68 = 196$.

Ou bien

- Travailler sur une décomposition A, puis B ou C et chercher une relation entre l'aire blanche et aire grise par motif
 - o Si décomposition de type B : montrer sur un motif que aire grise = 3 x aire blanche. Par exemple si décomposition B1 : montrer que l'aire blanche d'un motif est celle de 4 triangles demis carreaux, donc de 2 carreaux et que l'aire grise est celle de 4 carreaux et 4 demi-carreaux, donc de 6 carreaux.
 - o Si décomposition de type C : pour chaque bande horizontale (supérieure, médiane ou inférieure), se centrer sur un motif (par exemple C1 une colonne de largeur deux carreaux ou C2 une colonne de largeur un carreau ou) ; montrer (par pavage) que l'aire grise d'un motif est la même dans chaque bande ; en déduire que les aires grises des trois bandes sont égales et que l'aire blanche de la bande médiane est égale à l'aire grise de la bande supérieure.

Mots-clés

frise, motif, suite répétitive géométrique, aire, unité d'aire, quadrillage, dénombrement de carrés, de triangles, fonction

Points attribués

Sur 2542 classes de 21 sections,

Points	Nombre de 0	Nombre de 1	Nombre de 2	Nombre de 3	Nombre de 4	Total	Score moyen
Cat. 5	429	51	37	16	40	573	0.6
Cat. 6	831	105	47	17	46	1046	0.4
Cat. 7	646	64	41	27	145	923	0.9
tot	1906	220	125	60	231	2542	0.6

en %

Cat. 5	75%	9%	6%	3%	7%
Cat. 6	79%	10%	4%	2%	4%
Cat. 7	70%	7%	4%	3%	16%
tot	75%	9%	5%	2%	9%

Étude [23.I.9] La décoration de Charles

Selon les critères d'attribution des points suivants :

- 4 Réponse correcte (196 carreaux) avec le dessin complet de la décoration et/ou un texte expliquant l'analyse de la décoration et le procédé de calcul (prise en compte des deux bandes extrêmes, motif répété...).
- 3 Réponse correcte avec des explications insuffisantes (dessin incomplet de la décoration répétition de motif non signalé, procédé de calcul non explicite...).
- 2 Réponse avec explications claires, mais une erreur due à l'oubli des deux bandes des extrémités (par exemple $34 = 68:2$ motifs) OU dessin complet correct avec une erreur de comptage OU réponse 196 carrés sans dessin ni explication.
- 1 Un dessin est proposé avec un nombre erroné de motifs, mais la détermination de l'aire de la partie grise d'un motif d'un carré gris central de la frise est correcte.
- 0 Incompréhension du problème.

Procédures, obstacles et erreurs relevées

L'échec quasi total (trois quarts de « incompréhension du problème dans l'ensemble ») révèle des obstacles trop élevés pour les catégories 5, 6 et 7. En effet une part importante du travail réside (1) dans la compréhension de ce que représente le dessin et pour cela il faut s'appuyer sur le texte qui éclaire le dessin ; (2) dans l'analyse de la frise.

On relève de nombreuses incompréhensions de la figure : de nombreuses copies dessinent des éléments de frise entre les deux parties, comprenant 8 ou 9 carrés centraux.

La décoration n'a pas toujours été décomposée en deux parties : les deux bandes verticales extrêmes (2x2 carreaux blancs et 2x2 carreaux gris) et la frise centrale, à motifs répétés.

Peu de copies montrent une décomposition claire des motifs verticaux répétés.

Les égalités d'aire entre triangles blancs et carreaux du quadrillage, ou entre carrés gris du centre de la frise et carreaux du quadrillage ne sont pas perçues clairement.

Exploitations didactiques

Ce problème comporte deux difficultés

- D'une part la convention choisie pour représenter la longue décoration : en ne donnant que le dessin du début et celui de la fin et en laissant inférer ce qui se passe entre les deux, le texte suppose que les élèves ont l'idée d'une suite répétitive géométrique (une frise) et savent repérer des régularités.
- D'autre part l'analyse de la frise (apprendre à voir... avec un crayon) qui permet de repérer des régularités.
Ce n'est qu'à l'âge où les élèves sont capables de discerner les régularités et de prendre simultanément en compte toutes les données de la figure qu'on peut envisager une exploitation en relation avec le concept de fonction (à partir des catégories 7 ou 8).

Le problème pourrait servir à comprendre l'idée de figure en géométrie :

1. on voit (ou on croit voir) des choses sur le dessin, mais on ne doit considérer comme exactes que les informations données aussi par le texte ;
2. il est nécessaire d'analyser finement la figure pour avancer vers la réponse.

Analyse des copies des sections de Sienna (cat. 6) et de Franche-Comté (cat. 6 et 7)

L'analyse de ces copies fait apparaître quatre types de réponses selon la lecture du schéma de la décoration.

- A - Réponses travaillant sur les dessins considérés comme « schémas » de la décoration.
- B - Réponses appuyées sur un dessin auxiliaire complet de la décoration.
- C - Réponses s'appuyant sur une mauvaise interprétation des dessins.
- D - Autres réponses.

A - Réponses travaillant sur les dessins considérés comme « schémas » de la décoration

Décomposition A et calcul différence entre l'aire totale de la décoration et l'aire de la partie blanche

<p>Gruppo 3 problema 9 622</p> <p>DATI:</p> <p>68 = quadretti della parte bianca</p> <p>Domanda</p> <p>? = quadretti grigi</p> <p>Risultato</p> <p>trovo l'area della figura</p> <p>base · altezza = area</p> <p>68 · 4 = 272 272</p> <p>trovo i quadretti grigi</p> <p>Area - quadretti bianchi</p> <p>272 272 - 68 = 204</p> <p>spiegazione</p> <p>abbiamo trovato l'area della figura e poi abbiamo i quadretti bianchi</p> <p style="text-align: right;">24/10/20</p>	<p>Copie de Sienne (cat. 6)</p> <p>Calcul de l'aire totale, mais en se trompant sur la longueur totale de la décoration : 66 et pas 68</p> <p>Puis aire grise par différence</p>
---	--

1) Décomposition A et décomposition B1

- a) Décomposition A ; appui sur décomposition B1 (recherche de l'aire blanche par colonne de largeur un carreau) ; puis calcul de la différence entre l'aire totale et l'aire des carrés blancs :

Comme il y a 68 carreaux Blanc, pour trouver l'aire des carrés noirs, il faut calculer l'aire totale. On enlève les extrémités comptent 4 carreaux Blanc. Il reste donc 64 carreaux Blanc. Pour le milieu, on compte 1 carré Blanc par colonne. Il y a donc 64 colonnes. En ajoutant les extrémités, il y a 66 colonnes de longueur. On multiplie 4 (largeur) par 66 (longueur) pour trouver l'aire du rectangle. Cela fait 264. On ôte enfin le nombre de carrés Blancs: $264 - 68 = 196$ Il y a donc 196 carrés gris.

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

- b) Décompositions A et B1 (en nommant ligne une colonne) et utilisation du facteur 3 entre aire grise et blanche

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris. (Prenez comme unité d'aire un carreau du quadrillage.) Il y a 196 carreaux gris

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Il y a 68 carreaux Blanc, il y en a 4 sur les côtés donc il reste 64 carreaux. Sur chaque ligne sauf le début et la fin, il y a 1 carreau blanc donc il faut 64 lignes. Il y a 3 carreaux par ligne donc $64 \times 3 = 192$

Il y a 192 carreaux gris plus les 4 carreaux des côtés.

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

2) Décomposition A et décomposition B2

Un exemple :

<p> $68 - 4 = 64$ $64 : 2 = 32$ $32 \times 6 = 192$ $192 + 4 = 196$ </p> <p>Ragionamento</p> <p> abbiamo tolto il numero dei quadretti bianchi all'inizio e la fine. Poi abbiamo diviso il risultato per 2. Successivamente abbiamo moltiplicato il risultato $\times 6$ che sono i quadretti neri in ogni sequenza che si ripete poi abbiamo sommato quattro che sono i quadretti neri all'inizio e alla fine e abbiamo ottenuto l'area dei quadretti grigi. </p>	<p>Copie de Sienne (cat. 6)</p> <p>Les deux premiers calculs sont appuyés sur des décompositions A et sans doute B2 pour trouver 32 motifs de largeur 2 carreaux dans la frise centrale.</p> <p>L'aire grise de chacun de ces motifs est de celle de 6 carreaux gris.</p> <p>L'aire totale grise est obtenue en tenant compte des 4 carreaux gris des deux bandes verticales extrêmes</p>
---	---

3) Décomposition A et décomposition C

a) Décompositions A et C et utilisation du facteur 3 entre aire grise et blanche

Il y a 68 carrés donc entouré et donc 64 au milieu car il y a 4 carrés blanc autour (sur les côtés).
 Il y a 32 gros carrés au milieu. (1 gros carré vaut 2 petits carreaux).
 $64 : 2 = 32$
 Il y a donc 64 carreaux sur la bande du dessus et 64 sur celle du dessous. Il y en a aussi 64 dans les gros carrés et 4 en comptant ceux du côté droit et sur celui du côté gauche.
 $64 \times 3 + 4$
 $= 192 + 4$
 $= 196$
 Il y a donc en tout 196 petits carreaux gris.

Copie de FC (cat. 6 ou 7)

Réponse correcte. Centration sur la bande médiane. Calcul du nombre de carrés gris centraux (1 pour 2 carreaux gris de la bande supérieure). Déduction des égalités des aires des zones grises des trois bandes de la frise (ce qui entraîne que l'aire grise totale est 3 fois l'aire grise de la bande supérieure).
 Pas d'explication pour le facteur 3 entre aires blanche et grise.

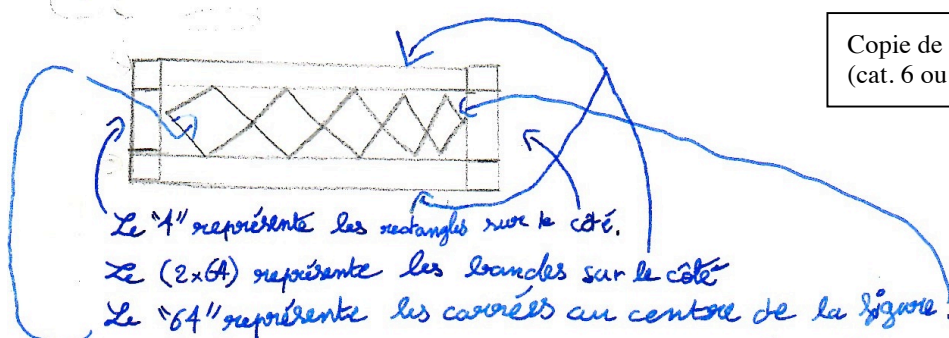
Étude [23.I.9] La décoration de Charles

- b) Décompositions A et C et pas beaucoup d'explications
Réponse correcte avec suite de calculs

<p>RISPONDO</p> <p>CI SIAMO AIUTATI CON LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA. ABBIAMO FATTO UNA STRISCIA LUNGA 64 ^{quadrati} quadrati, IN MODO DA FAR STARE 168 QUADRETTI BIANCHI. ABBIAMO CONTATO ANCHE GLI ALTRI QUADRETTI (QUELLI GRIGI) DIVIDENDO LA STRISCIA IN 8 QUADRETTI ALLA VOLTA. ABBIAMO CONTATO ANCHE LA STRISCIA SOTTO E LA ABBIAMO MOLTIPLICATA X 2 IN MODO DA CONTARE QUELLA SUPERIORE</p> <p>64x2= 128 8x8= 64 128+4= 132 132+64= 196 I QUADRATI GRIGI SONO 196</p>	<p>Copie de Sienne (cat. 6)</p> <p>Décomposition A puis C Explications incomplètes, mais calculs cohérents</p> <p>Bande du haut : 64 carreaux gris Bande du bas : 64 carreaux gris Une écriture juste, mais inutile 8x8=64 Total carreaux gris sauf bande centrale : 128+4=132 Bande centrale. 64 carreaux gris</p>
---	---

Réponse correcte avec affirmations exactes sous forme de schéma, mais sans explication

$4 + (64 \times 2) + 64 = 196$



Le "4" représente les rectangles sur le côté.
Le "(2x64)" représente les bandes sur le côté
Le "64" représente les carreaux au centre de la figure.

Donc 196 représente le nombre de carreaux coloriés en gris

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

4) Décomposition utilisée pour la figure non visible sur la copie

Réponse correcte qui s'appuie sur le facteur 3 entre zone blanche et grise, avec un tableau mais sans explication, sans qu'on sache quelle décomposition a été utilisée :

8	4	2	6	60	64
24	12	6	18	180	192

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

$192 + 4 = 196$

Pour 8 carreaux blancs il y a 24 carreaux noirs
Donc pour 68 il y en a 196

B - Réponses appuyées sur un dessin auxiliaire complet de la décoration

1. Réponse correcte : poursuite de la frise jusqu'à compter 68 carreaux blancs, parfois en organisant astucieusement le comptage, comme ici :

4
28
 $56 \times 2 = 112 + 10 = 128 + 56 = 184 + 8 = 192 + 4 = 196$
 $196 + 68 = 264$

x2
+

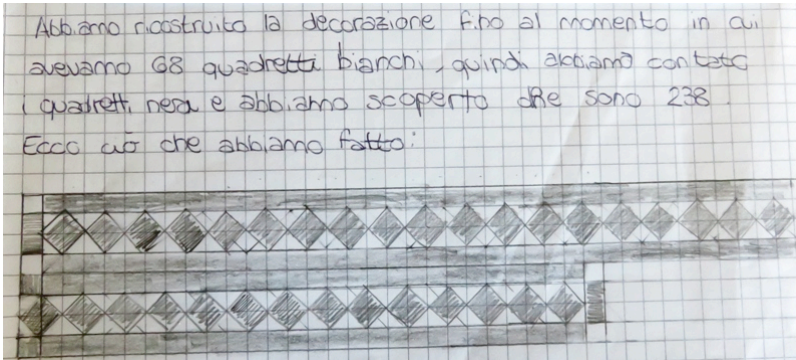
Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

2. Réponse incorrecte : erreur dans le dénombrement (ici réponse : 184)

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

Étude [23.I.9] La décoration de Charles

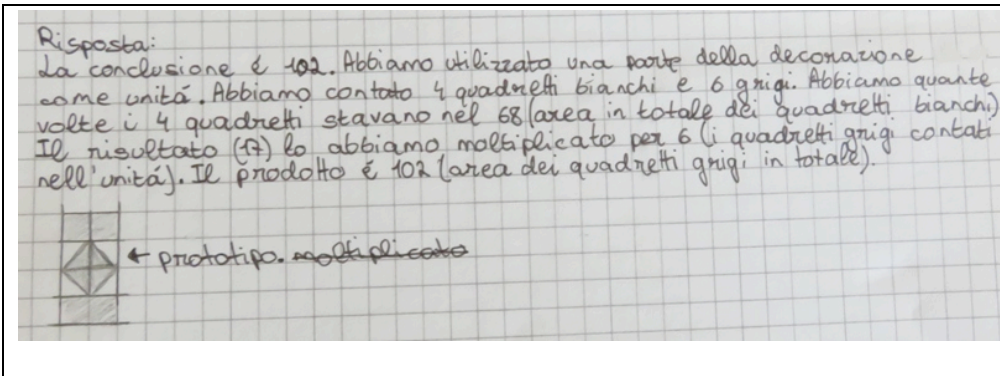
3. Réponse incorrecte : sans doute par oubli du rôle des s deux bandes extrême s (ici 33 carrés gris dans la bande central au lieu de 32)



Copie de Sienne (cat. 6)

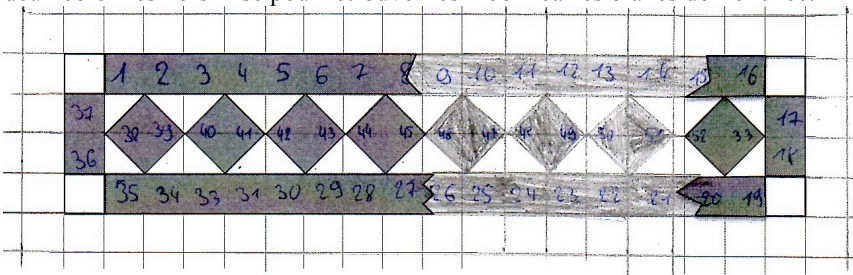
C - Réponses s'appuyant sur une mauvaise interprétation des dessins

1. Mais avec une analyse de la frise centrale de type B2



Copie de Sienne (cat. 6)
Pas de décomposition A
Décomposition B2 de la frise centrale
6 fois plus de carreaux gris que de carreaux blancs dans un motif vertical à deux colonnes
Le nombre retenu pour les carreaux blancs est de 17 (au lieu de 32)

2. En complétant l'espace vide (dans la plupart des copies par 3 motifs)
Voici un premier exemple, dans lequel les élèves ont, non seulement complété la frise, mais aussi « rajouté » les deux colonnes hors frise pour retrouver les « 68 » carrés blancs de l'énoncé.



Copie de FC (cat. 6 ou 7)

La décoration se termine, à droite, par une bande verticale de quatre carreaux, identique à la bande, de gauche.

Sur la décoration entière, l'aire de la partie laissée en blanc est de 68 carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris. (Prenez comme unité d'aire un carreau du quadrillage.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

On a continué la figure qui était au côté gauche pour arriver au côté droit. Quand nous avons dessiné le reste de la figure, nous avons trouvé 56 carrés blanc donc nous avons agrandi les côtés de la figure pour qu'on en ait 68.

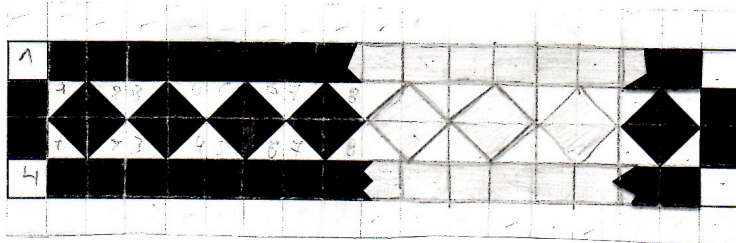
Après, nous avons compté le nombre de carrés noirs, il y en a 53.

Étude [23.I.9] La décoration de Charles

Dans la copie ci-dessous, les élèves ont reproduit le dessin en le « rétrécissant » à peine pour qu'il n'y ait pas d'espace vide. On ne sait ce qu'ils ont dénombré

On a reproduit les carreaux pour que ça nous donne la frise entière. Ensuite on a colorié les parties en gris et ensuite on a tout compté sauf qu'on a eu un petit problème donc à la place de trouver 68 carreaux on a trouvé 52 gris et 20 blanc = 72 carreaux.

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)



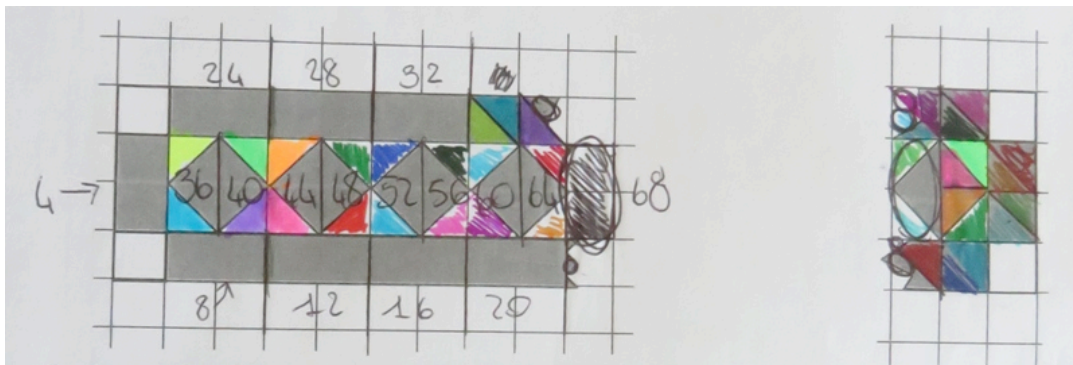
Au début de la décoration, à gauche il y a 25 carreaux qui sont coloriés en gris. Et à la fin, à droite il y a 6 carreaux qui sont coloriés en gris.

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

Si on additionne la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris est $25 + 6 = 31$ carreaux.

On a aussi compté le nombre de carreaux en gris à gauche et à droite et il y a 4 carreaux qui ne sont pas comptés.

3. En ne considérant que les deux parties dessinées et comptant les parties grises (unité : aire du petit triangle)



Copie de Sienna
(cat. 6)

D - Autres réponses

Dans 5 copies, les élèves ont voulu voir dans le dessin complété « 17 colonnes » pour que en multipliant 17 par 4 ils retrouvent bien le « 68 » de l'énoncé

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Nous avons calculer pour savoir comment tracer les carreaux effacés
 donc on a trouvé qu'il faut faire $68:4$ car la décoration est tracé sur 4
 carreaux. Il faut tracer 17 carreaux sur 4 lignes horizontales. Ensuite on a
 observé que les carrés gris étaient tracé sur 2 carreaux donc on a fait $17+9+2 \times 2$
 puis nous avons calculé pour les carrés gris (14) et nous avons tous calculé
 $(14 \times 56 + 4 = 74)$. L'air de la décoration fait 74 m²

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

1. Certaines classes n'ont pas différencié le quadrillage support de la décoration (qui n'était pas visible sur tous les énoncés) : elles ont considéré qu'il y avait deux lignes « supplémentaires » de carreaux blancs.
2. Signalons l'erreur : « dans chaque colonne le nombre de noires est deux fois le nombre de blanches » (au lieu de trois fois).
3. Quelques copies présentent des développements dont on peine à suivre le fil, comme ici :

(unité = cm²)

On calcule le tour du périmètre est ~~76~~ cm². On a trouvé
 que le tour fait 146 cm².
 Pour l'intérieur du rectangle on a trouvé 32 cm² donc on a
 fait $32 \times 76 = 2432$.
 Pour trouver l'aire de la partie de la décoration de Charles,
 nous avons fait $2432 : 68 = 86,9$ cm²,

L'aire de la partie de la décoration de Charles est de
 86,9 cm².

Copie de FC
(cat. 6 ou 7)

Alexis

Autres remarques à partir de l'analyse des copies de Franche-Comté

- Sur 314 copies, 223 ont « 0 » (103 sur 152 au niveau 7, 120 sur 162 au niveau 6), 15 n'ont rien écrit au niveau 7 et 17 au niveau 6.
- La très mauvaise réussite de ce problème provient sans doute de la donnée du dessin partiel de cette frise dont le vide a été interprété le plus souvent comme devant être rempli en rejoignant les deux extrémités. Il se peut aussi que le texte fourni n'aide pas à la compréhension.
- Le dessin, déjà bien élaboré, capte totalement leur attention.
- Le choix de la variable didactique « 68 » pour le nombre total de carrés blancs conforte sans doute quelques élèves dans leur dénombrement (approximatif !) du nombre de colonnes : « 17 », puisque $17 \times 4 = 68$.

Étude [23.I.9] La décoration de Charles

Ce problème semble inadapté pour le niveau 5. En effet les élèves de niveau 5

- soit ne comprennent pas ce que cache la partie vide
- soit passent du temps à essayer de refaire la décoration entière par collage
- soit prennent beaucoup de temps à dessiner la décoration entière

Les erreurs peuvent être fréquentes.

<p>Erreur 1 : relier les deux parties du dessin</p>	<p>Erreur 2 : combler le vide par un morceau de la frise photocopiée... en rompant la régularité</p>	<p>Erreur 3 : dessiner une décoration en gros à même échelle que le dessin de la feuille (conservé la régularité, mais pas la longueur fixée par le texte)</p>

Ce qui conduit à proposer l'attribution des points suivante pour le niveau 5 :

4-3 points: La résolution correcte est obtenue en utilisant un modèle graphique et le dénombrement. Certains peuvent avoir mal dénombré en dépit d'avoir développé avec succès le modèle graphique.

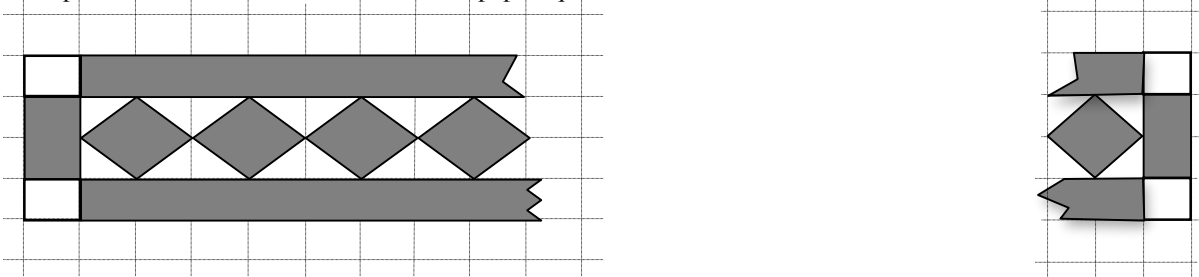
2 points : Le modèle graphique est compris mais erreur ou non prise en compte des deux extrêmes

1-0 points: Erreurs de compréhension de la répétition, de calcul de la répartition des parties grises et blanches, difficulté à recréer le modèle correct

Proposition de modification du texte

Compte tenu de ces analyses il serait judicieux de proposer le texte modifié qui suit pour les catégories 6, 7 et 8.

Charles peint une décoration sur une feuille de papier quadrillé. Voici deux morceaux du dessin de la décoration :



La décoration est large de 4 carreaux. Elle commence par une bande verticale d'un carreau : deux carreaux blancs encadrent un rectangle de deux carreaux gris (début du dessin de gauche).

Elle se termine, comme elle a commencé, par une bande verticale d'un carreau (fin dessin de droite).

Entre ces deux bandes (aux extrémités), la décoration comporte de haut en bas : une bande horizontale toute grise (1 carreau de large) ; une bande horizontale (2 carreaux de large) qui fait voir une suite de carrés gris sur fond blanc ; enfin une autre bande horizontale toute grise (1 carreau de large).

Sur la décoration entière, l'aire de la partie blanche est de 68 carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris ?

(Prenez comme unité d'aire l'aire d'un carreau du quadrillage.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.