Le pré du père François (I)[1]

Groupe fonction

Mots-clés : Périmètre et aire d'un rectangle, diviseurs, contrainte linéaire

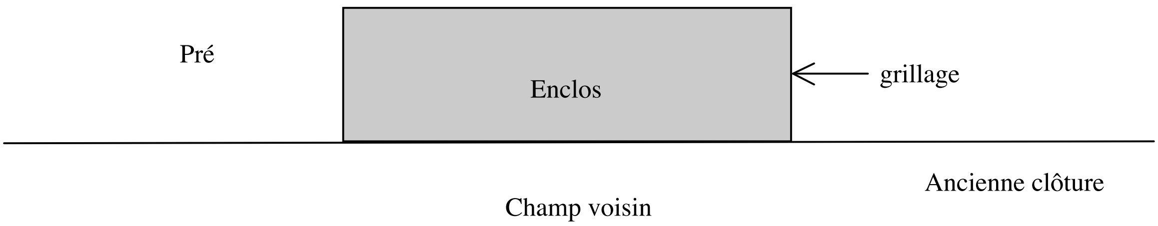
Le problème

Il s'agit de trouver les dimensions d'un rectangle de 42 m^2 et de 20 m de périmètre partiel, composé de trois côtés, dans un contexte d'enclos rectangulaire protégé par un grillage.

Le père François possède un pré en bordure du champ d'un voisin, une ancienne clôture rectiligne séparant les deux propriétés. Pour faire l'essai d'une nouvelle semence, le père François veut réserver dans son pré, le long du champ voisin, un enclos rectangulaire de 42 m^2 (voir la figure).

Pour éviter que ses bêtes, qui paissent dans son pré, aillent piétiner sa nouvelle plantation, il veut installer un grillage formant les trois autres côtés de la zone rectangulaire à réserver. Il dispose d'un grillage d'une longueur de 20 m qu'il veut utiliser entièrement (voir la figure).

Pour ne pas compliquer ses mesures de longueurs, il souhaite les effectuer en nombres entiers de mètres.



Quelles seront les mesures des côtés de l'enclos rectangulaire du père François ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Se rappeler que l'aire d'un rectangle est égale au produit de la longueur par la largeur.
- Chercher les couples de diviseurs entiers (a, b) de 42 qui vérifient $a + 2b = 20$. Pour cela, on peut faire un tableau de calcul analogue au suivant :

a	2	3	6	7	14	21
b	21	14	7	6	3	2
$a + 2b$	44	31	20	19	20	25

- En conclure que le père François a deux possibilités s'il veut utiliser entièrement ses 20 m de grillage : faire un enclos de 6 m pour le côté parallèle à la clôture sur 7 m pour les deux côtés perpendiculaires ou un enclos très allongé de 14 mètres de long sur 3 m de large.

Il pourrait aussi faire un côté de 7 m et les deux autres de 6 m avec 19 m de grillage, mais il veut utiliser ses 20 m entièrement.

---

[1] Problème 14 de l'épreuve II du 18e rallye, de catégories 7 et 8.

Résultats

Résultats obtenus sur 1133 classes de 21 sections ayant participé à l'épreuve II du 14e RMT

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb classes*	*m*
Catégorie 7	232	158	247	20	25	682	1,19
Catégorie 8	111	85	196	32	27	451	1,51
Ensemble	343	243	443	52	52	1133	1,32

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Les deux couples solutions (6 m et deux fois 7 m, ou 14 m et deux fois 3 m), avec une explication claire de la démarche et une recherche exhaustive des possibilités.

3 Les deux couples solutions, avec une explication cohérente de la procédure suivie.

2 Un seul couple de solutions avec une explication cohérente de la procédure suivie.

1 Un seul couple de solutions sans explication.

0 Incompréhension du problème ou non respect de la contrainte des 20 m.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

a) Relation entre vocabulaire et dessin :

Dans l'énoncé, il est question de chercher “les mesures des côtés de l'enclos”, ce que beaucoup d'élèves ont traduit par “chercher la longueur et la largeur du rectangle”. Plusieurs copies, certaines explicitement, d'autres implicitement, appellent « longueur » le grand côté horizontal sur le dessin et « largeur » le petit côté vertical sur le dessin.

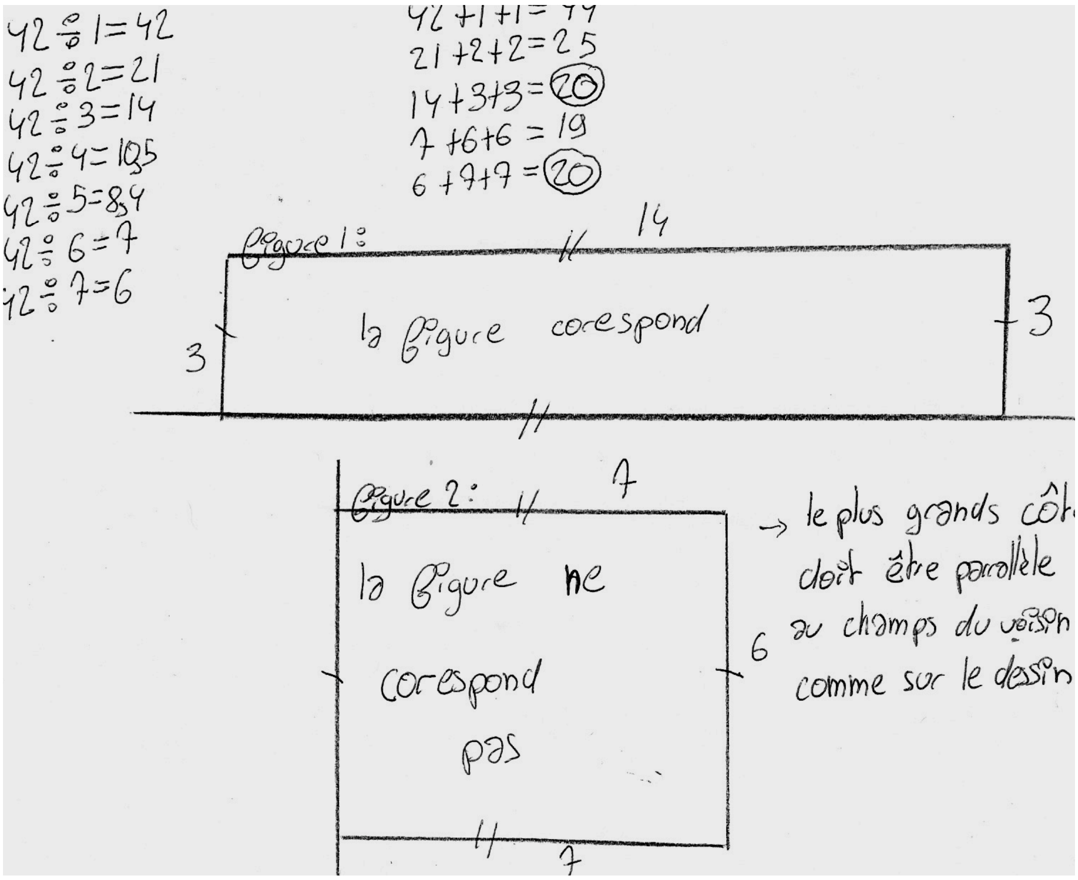


fig 1. Copie de niveau 8

D'où le trouble exprimé par certains « *dessin trompeur* » et même l'impossibilité pour certains de retenir la solution 7 m pour chacun des deux côtés verticaux et 6 m pour l'autre *« la figure ne correspond pas »,* puisque 7 (mesure de la « largeur ») est plus grand que 6 (mesure de la « longueur »). Et combien ont éliminé sans le dire 7, 7, 6 en n'essayant que 6, 6, 7 lorsqu'ils cherchent les diviseurs de 42 ?

La copie de niveau 8 de la figure 1 fournit un exemple.

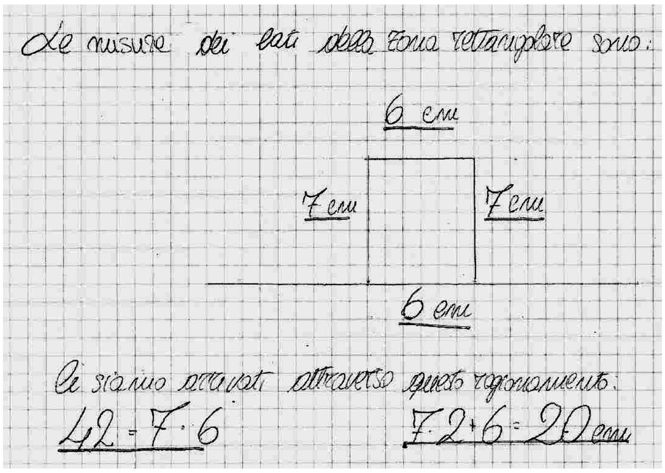
Il est possible que l'insistance de l'énoncé à se référer à la figure (« voir la figure » répété deux fois) soit liée à cette interprétation. Une autre ambiguïté possible du texte est la forme de la question : « Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse » qui peut faire penser à une solution unique.

b) Essais numériques

- Un tableau incomplet avec une seule réponse dans la copie de niveau 7 de la figure 2.
- Une réponse avec un dessin particulier (figure 3).
- Un tableau incomplet dans la copie de niveau 8 de la figure 4, mais avec les deux réponses.

Largeur	Longueur	Total	m2	
1	18	20	18	pas assez
2	16	20	32	pas assez
3	14	20	42	parfait

fig 2. Tableau incomplet (niveau 7



Les mesures des côtés de la zone rectangulaire sont :
Nous sommes arrivés avec ce raisonnement :

42 = 7 . 6 7 . 2 + 6 = 20 m

fig 3. Avec dessin

						Périmètre correcte				
Longueur	10	14	8	4	6	8	8	6	18	16
Largeur	5	3	6	8	7	4	5	6	1	2
						aire correcte				

10x5 = 50 cm²
14x3 = 42 cm² ⟶ 14+3+3 = 20 cm
8x6 = 48 cm²
4x8 = 32 cm²
6x7 = 42 cm² ⟶ 7+7+6 = 20 cm

Les mesures des côtés de l'enclos du père François se soit : $\boxed{6x7}$ ou $\boxed{14x3}$.

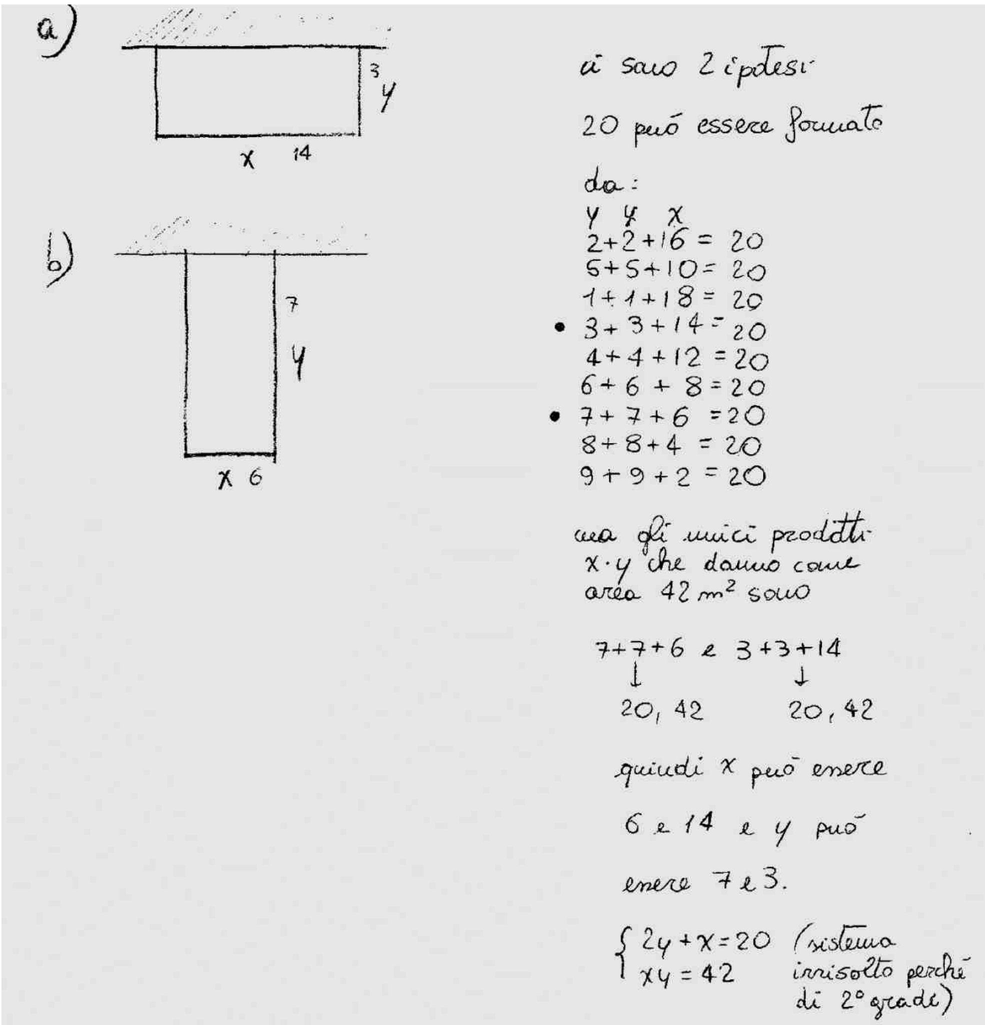
fig 4. Tableau incomplet (niveau 8)

Remarque sur la parité des mesures : dans la copie de niveau 8 de la figure 5, les élèves ont d’abord remarqué que « la mesure de la longueur » est paire, ils la font donc varier de 2 à 18.

Longueur	Largeur 1	Largeur 2	
2	9	9	a
4	8	8	b
6	7	7	c
8	6	6	d
10	5	5	e
12	4	4	f
14	3	3	g
16	2	2	h
18	1	1	i

résultats correctes.

fig 5. Copie niveau 8



Il y a 2 hypothèses 20 peut être formé de

Les seuls produits x.y qui donnent comme aire 42 m² sont

Donc x peut être 6 et 14 et y peut être 7 et 3

(système non résolu parce que du 2°degré)

fig 6. Tentative algébrique (niveau 8)

La figure 6 montre des essais numériques organisés portant sur la décomposition de la longueur fixée du grillage à 20 m, avec les deux réponses clairement exposées. Cette copie montre aussi une tentative algébrique infructueuse au niveau 8.

c) Procédures arithmétiques

En grande majorité, les élèves ont commencé par chercher les diviseurs de 42. Les copies qui commencent par exploiter le périmètre sont plus rares. Cette procédure aboutit si des essais systématiques sont bien conduits. Ce n'est pas le cas de la copie de niveau 7 de la figure 7.

La figure 8, montre un obstacle de l'identification des inconnues au niveau 7.

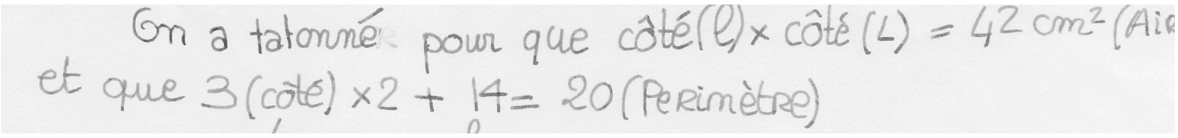


fig 7. Copie de niveau 7

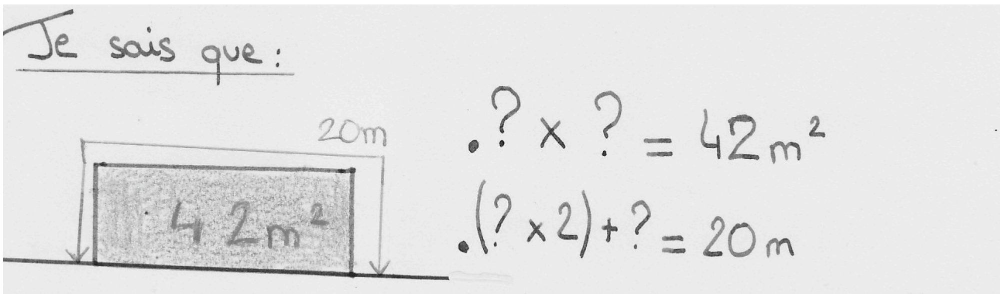


fig 8. Problème d'identification des inconnues (niveau 7)

De même dans la copie de la figure 9.

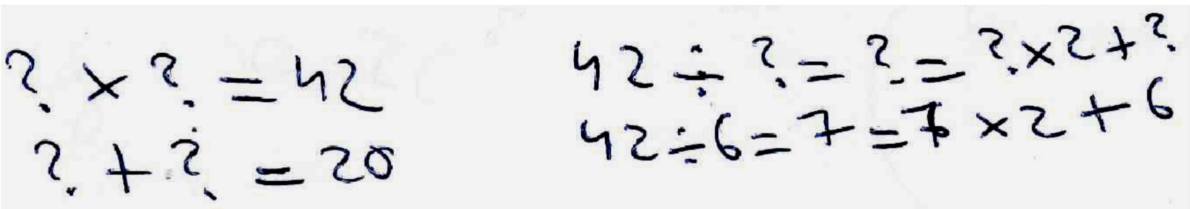


fig 9. Problème d'identification des inconnues

d) Tentatives de procédures algébriques

La mise en équations du problème conduit à un système du second degré à deux inconnues, hors de portée pour des élèves de niveaux 7 ou 8. La résolution peut alors être conduite par essais numériques avec des nombres entiers, comme le montre la copie de niveau 8 de la figure 10.

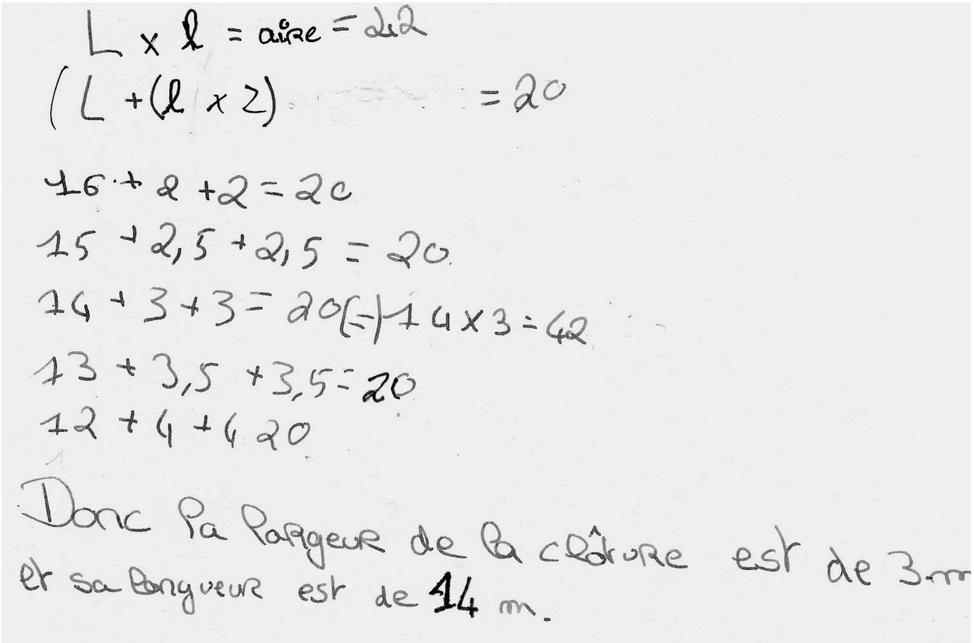

L x l = aire = 42
(L + (l x 2) = 20
16 + 2 + 2 = 20
15 + 2,5 + 2,5 = 20
14 + 3 + 3 = 20 (=) 14 x 3 = 42
13 + 3,5 + 3,5 = 20
12 + 4 + 4 20
Donc la largeur de la clôture est de 3 m et sa longueur est de 14 m.

fig 10. Copie de niveau 8

La figure 11 montre une tentative de résolution algébrique non aboutie, avec vérification du résultat.

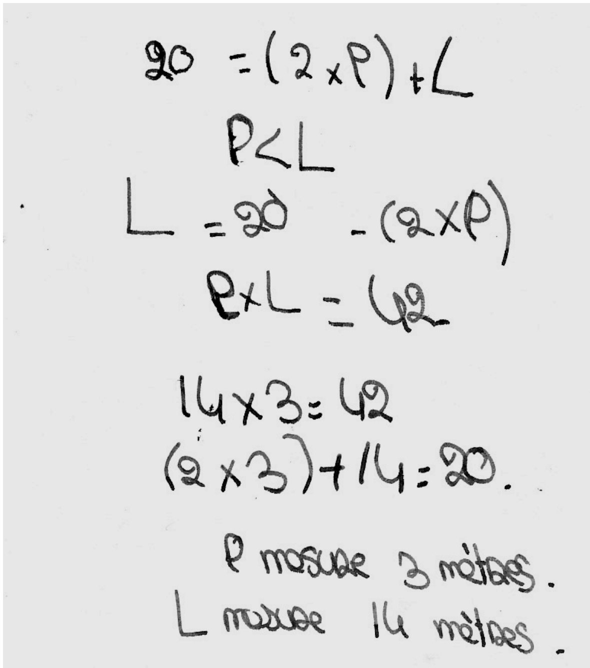

20 = (2 x l) + L
l < L
L = 20 - (2 x l)
l x L = 42
14 x 3 = 42
(2 x 3) + 14 = 20.
l mesure 3 mètres.
L mesure 14 mètres.

fig 11. Résolution non aboutie

Dans la copie de niveau 8 de la figure 12, les équations littérales sont bien posées mais la résolution est faite par essais numériques non exhaustifs.

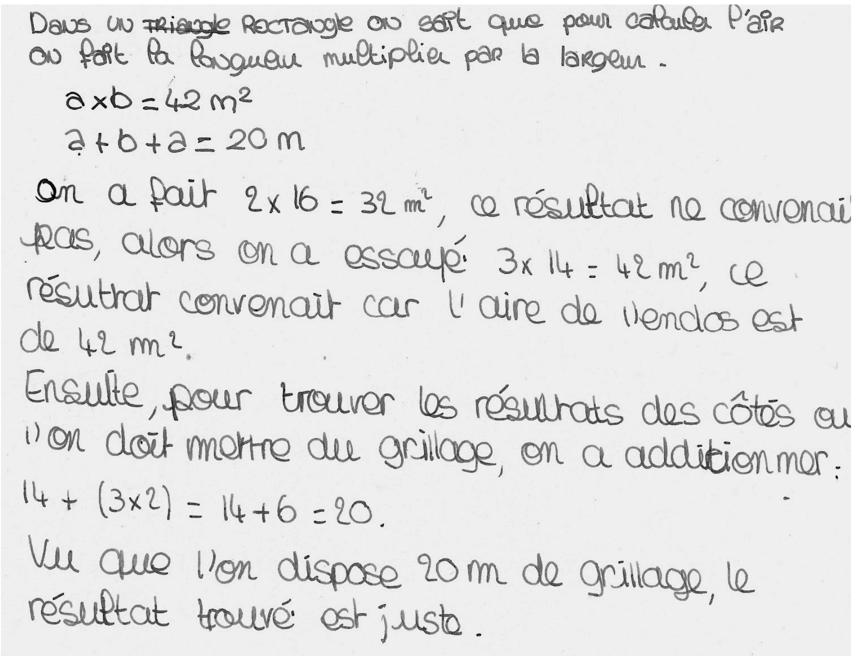

Dans un ~~triangle~~ rectangle on sait que pour calculer l'air on fait la longueur multiplier par la largeur.
$a \times b = 42\ m^2$
$a + b + a = 20\ m$
On a fait $2 \times 16 = 32\ m^2$, ce résultat ne convenai pas, alors on a essayé $3 \times 14 = 42\ m^2$, ce résultat convenait car l'aire de l'enclos est de $42\ m^2$.
Ensuite, pour trouver les résultats des côtés où l'on doit mettre du grillage, on a additionner:
$14 + (3 \times 2) = 14 + 6 = 20$.
Vu que l'on dispose 20 m de grillage, le résultat trouvé est juste.

fig 12. Résolution par tentatives (niveau 8)

Exploitations didactiques

Il est intéressant de comparer ce problème à son homologue Le pré du père François (II). La demande de travailler en nombres entiers, change totalement la tâche et le domaine conceptuel du problème. La donnée 42 m^2 pour l'aire de l'enclos rectangulaire est une variable didactique très forte, car ce nombre admet des diviseurs, 2, 3, 6, 7, 14, 21 qui, combinés judicieusement, permettent d'obtenir la longueur de 20 m du grillage. Ces valeurs numériques permettent d'éviter une solution purement algébrique, ce qui serait le cas avec 40 m^2 au lieu de 42 m^2 pour l'aire, les solutions étant alors non entières.

Ce problème peut être une bonne activité sur les notions d'inconnues et d'équations issues d'un problème pseudo concret. Les essais numériques qu'il suppose pour être résolu conduisent à des remplacements successifs et organisés des inconnues par des valeurs entières aux niveaux 7 et 8, mettant en œuvre des relations fonctionnelles. La notion de fonction reste implicite, bien que présente dans ce type d'activité.

Bibliographie

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.

Henry, A., Henry M. & Rizza, A. Funzioni per risolvere problemi, La gazzetta di Transalpino, n.1, 2011, http://www.armtint.org/.