Machine à calculer[1]

Groupe fonction

Le problème

Il s'agit de la recherche d'un algorithme ou d'une fonction simple donnés par une relation objet-image. Dans ce problème, trois couples objet-image d'une fonction affine sont donnés : (5 ; 25), (7 ; 31), (10 ; 40), on demande l'image de 9. Son énoncé est le suivant :

Machine à calculer
Sophie possède une sorte de machine à calculer munie d'une touche ☺.

Quand Sophie tape 5 puis ☺, sa machine affiche : 25

Quand Sophie tape 7 puis ☺, sa machine affiche : 31

Quand Sophie tape 10 puis ☺, sa machine affiche : 40

Quand Sophie tape 9 puis ☺, que pourrait afficher sa machine ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que la touche « smile » fait correspondre une « image » à tout nombre que l'on « entre » dans la machine. Remarquer que la correspondance objet-image n'est pas une simple proportionnalité (25 = 5x5, mais 31 ≠ 7x5).

- Considérer les variations correspondantes entre objets et images à partir des trois exemples donnés : quand la valeur introduite augmente de 2 (de 5 à 7), son image augmente de 6 (de 25 à 31) et quand elle augmente de 3 (de 7 à 10), l'image augmente de 9 (de 31 à 40).

- Conjecturer la stabilité de cette remarque et conclure que pour une entrée égale à 9 (7+2), la calculatrice indiquera 37 (31+6).

- Plus généralement, faire l'hypothèse que chaque fois qu'on augmente de 1 le nombre de l'entrée, la machine augmente de 3 le nombre affiché (« smile » est la fonction affine : 10 + 3x).

L'analyse a priori met en évidence plusieurs procédures relevant plus ou moins explicitement de la notion de fonction suivant les niveaux des élèves :

1. Mettre en relation les variations entre objets et images pour observer sur les exemples donnés que chaque fois qu'on augment de 1 le nombre de l'entrée, la machine augmente de 3 le nombre affiché. Faire (implicitement ?) l'hypothèse de la généralité de cette propriété (hypothèse d'une fonction affine) et l'appliquer à la valeur 9.

2. Procéder par un tableau de nombre à compléter et y chercher des régularités, en particulier celle évoquée précédemment.

entrées :	5	6	7	8	9	10
images :	25		31			40

[1] Problème 10 de l'épreuve II du 15e rallye, de catégories 5,6,7.

Dans ce cas, il suffit de compléter la suite arithmétique 25 ; 28 ; 31 ; 34 ; 37 ; 40 (en vérifiant le 31 au passage et en déterminant le 37 comme image de 9).

3. D'un point de vue « fonctionnel », chercher des relations directes entre l'entrée et la sortie : envisager une multiplication, ou une addition, et se rendre compte qu'il faut orienter ses recherches vers une composition de deux « fonctions simples », par exemple d'une multiplication et d'une addition. Une multiplication par 3 fait correspondre 3, 7 et 10 à 15, 21 et 30 qui valent 10 de moins que les images respectives issues de la machine. La « machine à multiplier par 3 puis ajouter 10 » (fonction affine x –> 3x + 10) est donc une hypothèse à accepter pour les trois couples donnés. L'image de 9 serait alors 3 ξ 9 + 10 = 37.

4. Pour les élèves qui ont déjà rencontré des représentations graphiques, utiliser le fait que les trois couples (5 ; 25), (7 ; 31) et (10 ; 40) sont représentés par des points alignés.

Les résultats

Sur 1093 classes de 12 sections ayant participé à l'épreuve II du 15e RMT,

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb classes*	*m*
Catégorie 5 (en %)	27	11	5	20	37	240	2,30
Catégorie 6 (en %)	32	3	8	19	37	468	2,25
Catégorie 7 (en %)	23	3	5	16	54	385	2,75
Ensemble (en %)	28	5	7	18	43	1093	2,45

Selon les critères de l'analyse a priori du problème :

- 4 pts : Réponse exacte (37) avec explicitation de la règle trouvée et vérification sur les trois exemples donnés
- 3 pts :Réponse exacte avec explications incomplètes (par exemple sans les vérifications des trois exemples donnés)
- 2 pts : Réponse exacte sans aucune explication
- ou émission d'une hypothèse, confrontation avec les autres valeurs numériques mais sans calculer l'image de 9
- 1 pt : Résultats comme 45 ou 36 ; avec une conjecture émise, explicitée mais non pas vérifiée pour les autres nombres donnés, et appliquée directement au nombre « 9 »
- 0 pt : incompréhension du problème, absence de résultat

Le taux de réussite moyenne, en points attribués, est du même ordre en catégories 5 et 6 (2,30 et 2,25) il augmente sensiblement en catégorie 7 (2,75).

La réponse exacte a été trouvée (2, 3 et 4 points) par environ 60% des groupes en catégorie 5 et 6 et par les trois quarts en catégorie 7. La différence se fait sur les explications et les vérifications.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Il n'y a pas vraiment « d'erreurs » pour les 28 % des groupes ayant obtenu « 0 point » (« incompréhension du problème »).

L'obstacle principal est la formulation de l'hypothèse de stabilité de la relation fonctionnelle entre objet et image. Celle-ci révèle implicitement l'appréhension de la notion de fonction, qui ne se manifestera qu'aux niveaux 9 et 10.

Cependant, une approche de cette idée peut se révéler dans la construction d'un tableau de valeurs (ou d'une mise en relation des valeurs entrées et des affichages donnés par la calculatrice) qui respecte une certaine régularité entre les données et les images correspondantes. Un algorithme de calcul peut alors être mis en œuvre.

Différentes procédures ont été observées dans les copies, y compris au niveau 5, sauf pour la représentation graphique, outil non disponible à ce niveau. La variété des stratégies attendues présentées dans l'analyse a priori se retrouve dans l'ensemble des copies que l'on peut assez facilement classer en fonction de ces critères.

Exploitations didactiques

Dans les conditions de passation d'une épreuve du RMT, le problème est à la portée d'une majorité de groupes d'élèves de toutes ces catégories, vu la simplicité des nombres choisis et de la fonction la plus évidente. Sans du tout avoir étudié les fonctions d'un point de vue mathématique, ces groupes font preuve d'une perception déjà bien élaborée du concept : une relation ou un lien entre le nombre qu'on entre dans la calculatrice et le résultat qui en sort. Tout y est : les essais pour trouver le lien, les vérifications, le fonctionnement pour de nouveaux nombres. Peut-on espérer mieux ?

Dans une pratique habituelle de classe, les conditions changent car l'enseignant est là ; il peut organiser des mises en commun, des validations intermédiaires. Il peut même arriver à « faire réussir » le problème en prenant à sa charge des moments clés de la résolution ; mais par de tels effets de contrat didactique, on n'atteindrait pas le but de l'activité, par exemple en demandant explicitement aux élèves de *« trouver » une formule donnant les calculs à effectuer pour savoir ce que va afficher la calculatrice quand on tape un nombre*.

Il faut atteindre les niveaux 8 à 10 (14 -16 ans) pour s'attendre à ce que la plupart des élèves puissent observer et décrire la régularité des variations sur les trois exemples donnés et les extrapoler aux autres nombres. Cependant la plupart des groupes expriment le « ξ 3 + 10 » qui est tout à fait suffisant pour l'objectif de ce problèmes aux niveaux du RMT. La notion de fonction comme correspondance unique entre des données numériques et l'affichage obtenu sur la calculatrice est alors l'objectif didactique principal de cette activité.

Soulignons que la réponse n'est pas unique du point de vue mathématique, elle est même indéterminée. Notons l'usage du conditionnel dans la question « …**pourrait** afficher sa machine ? » qui fait allusion à cette indétermination, du point de vue de la rigueur. Ainsi, il ne faudrait pas considérer qu'une réponse différente de 37 est « fausse » ou qu'il n'y a qu'une seule fonction qui convienne. Par exemple, la réponse $f(9) = -91$ est cohérente avec la fonction polynôme $f(n) = n^4 - 15n^3 + n^2 + 738\,n - 2440$ pour laquelle 5, 7 et 10 ont pour images 25, 31 et 40.

Pour aller plus loin

Voici quelques exemples extraits de copies de niveau 5, organisés selon une progression de l'acquisition de la notion de fonction.

1. Une démarche algorithmique erronée

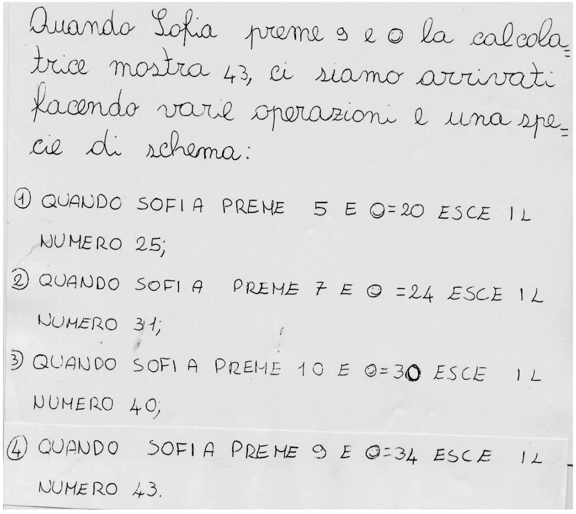
Quand Sophie presse 9 et ☺, la calculatrice montre 43, nous y sommes arrivés en faisant diverses opérations et une sorte de schéma :

1 Quand Sophie presse 5 et ☺ = 20, il vient le nombre 25 ;

2 Quand Sophie presse 7 et ☺ = 24, il vient le nombre 31 ;

3 Quand Sophie presse 10 et ☺ = 30, il vient le nombre 40 ;

4 Quand Sophie presse 9 et ☺ = 34, il vient le nombre 43. »



Quando Sofia preme 9 e ☺ la calcolatrice mostra 43, ci siamo arrivati facendo varie operazioni e una specie di schema:

① QUANDO SOFIA PREME 5 E ☺=20 ESCE IL NUMERO 25;

② QUANDO SOFIA PREME 7 E ☺=24 ESCE IL NUMERO 31;

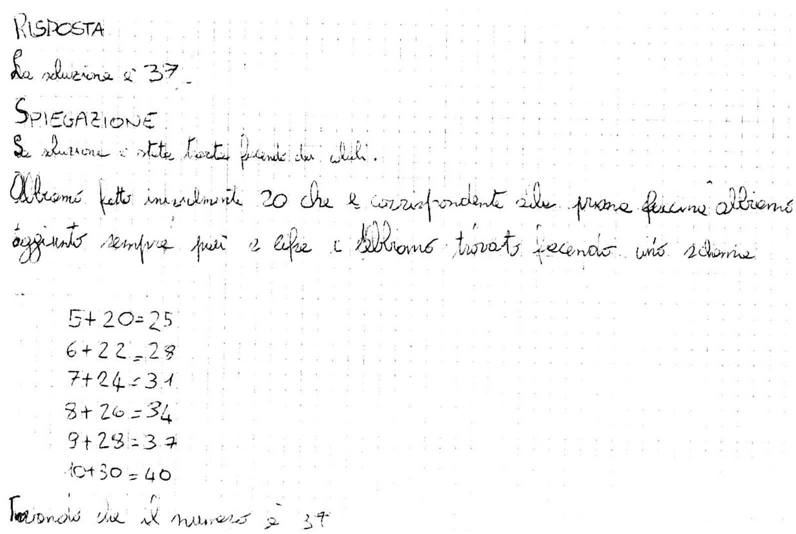
③ QUANDO SOFIA PREME 10 E ☺=30 ESCE IL NUMERO 40;

④ QUANDO SOFIA PREME 9 E ☺=34 ESCE IL NUMERO 43.

On peut voir dans cette copie de niveau 5 un obstacle majeur s'opposant à une approche fonctionnelle. Différentes valeurs numériques sont attribuées à la touche ☺ suivant les entrées. Les enfants se placent dans un cadre additif pour affecter cette valeur à partir du résultat indiqué, de telle sorte que l'effet de cette touche soit une simple addition. On ne sait pas pourquoi la valeur 34 lui est attribuée pour répondre à la question posée avec l'entrée 9.

2. Un algorithme basé sur les régularités qui tombe juste dans le contexte linéaire du problème :

RÉPONSE : La solution est 37.
EXPLICATION : La solution est obtenue en faisant des calculs. Nous avons fait initialement 20 qui correspond à la première phrase et nous avons ajouté toujours de 2 en 2 et nous avons trouvé en faisant un schéma. Nous avons trouvé que le nombre est 37



RISPOSTA

La soluzione è 37.

SPIEGAZIONE

La soluzione è stata trovata facendo dei calcoli.

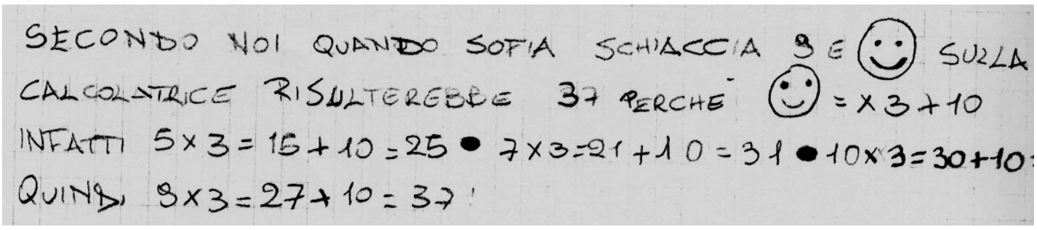
Abbiamo fatto inizialmente 20 che è corrispondente alla prima frase e abbiamo aggiunto sempre più 2 e abbiamo trovato facendo uno schema

5+20=25
6+22=28
7+24=31
8+26=34
9+28=37
10+30=40

Troviamo che il numero è 37

Se plaçant dans un cadre additif, les élèves, partant du résultat 25, ont donné l'opération + 20 pour l'effet de la touche ☺ sur le nombre 5. La recherche systématique d'un algorithme simple les conduit à la progression de 2 en 2 pour donner les effets successifs de la touche ☺ appliquée à la suite des entiers. Les valeurs données pour 7 et 10 confirment cet algorithme et la réponse 37 en découle. De ce point de vue, le calcul effectué par la touche ☺ dépend de l'entrée et ne peut être représenté par une fonction.

3. Un même algorithmique de calcul exécuté par la touche ☺ sur toute donnée, sans aller jusqu'à une appréhension fonctionnelle

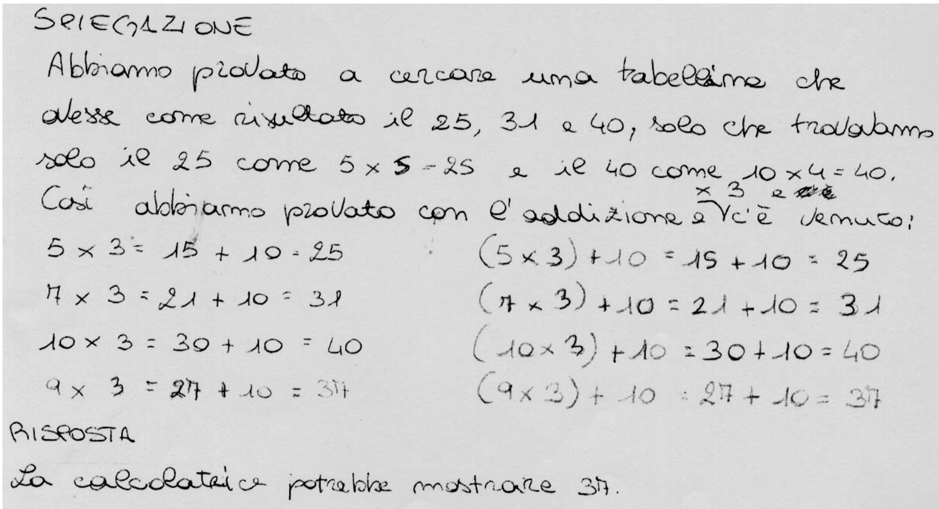

SECONDO NOI QUANDO SOFIA SCHIACCIA 9 E ☺ SULLA
CALCOLATRICE RISULTEREBBE 37 PERCHE' ☺ = x 3 + 10
INFATTI 5 x 3 = 15 + 10 = 25 • 7 x 3 = 21 + 10 = 31 • 10 x 3 = 30 + 10
QUINDI 9 x 3 = 27 + 10 = 37 !

Selon nous quand Sophie presse 9 et ☺ sur la calculatrice il en résulte 37 parce que ☺ = ξ 3 + 10.

En effet 5 ξ 3 = 15 + 10 = 25 ; 7 ξ 3 = 21 + 10 = 31 ; 10 ξ 3 = 30 + 10 = 40,
donc 9 ξ 3 = 27 + 10 = 37.

La première phrase suggère que cette démarche algorithmique dévoile la fonction sous-jacente à la touche ☺, la formule étant quasiment écrite. Mais la deuxième phrase montre que la suite des calculs n'est pas conçue globalement, d'un point de vue fonctionnel : l'algorithme donné par les élèves consiste d'abord à multiplier le nombre donné par 3, puis à ajouter 10 au résultat. J'ai des doutes sur cette affirmation à propos de la deuxième phrase.

4. Le même algorithme interprété par une formule favorisant une appréhension fonctionnelle implicite


SPIEGAZIONE
Abbiamo provato a cercare una tabellina che desse come risultato il 25, 31 e 40, solo che trovavamo solo il 25 come 5 x 5 = 25 e il 40 come 10 x 4 = 40.
Così abbiamo provato con l'addizione e x 3 e c'è venuto:
5 x 3 = 15 + 10 = 25 (5 x 3) + 10 = 15 + 10 = 25
7 x 3 = 21 + 10 = 31 (7 x 3) + 10 = 21 + 10 = 31
10 x 3 = 30 + 10 = 40 (10 x 3) + 10 = 30 + 10 = 40
9 x 3 = 27 + 10 = 37 (9 x 3) + 10 = 27 + 10 = 37
RISPOSTA
La calcolatrice potrebbe mostrare 37.

EXPLICATION
Nous avons essayé de chercher un tableau qui donne comme résultats 25, 31 et 40, nous avons trouvé seulement 25 comme 5 ξ 5 = 25 et 40 comme 10 ξ 4 = 40.

Ainsi nous avons essayé avec l'addition et ξ 3 et il est venu :

5 ξ 3 = 15 + 10 = 25	*(5 ξ 3) + 10 = 15 + 10 = 25*
7 ξ 3 = 21 + 10 = 31	*(7 ξ 3) + 10 = 21 + 10 = 31*
10 ξ 3 = 30 + 10 = 40	*(10 ξ 3) + 10 = 30 + 10 = 40*
9 ξ 3 = 27 + 10 = 37	*(9 ξ 3) + 10 = 27 + 10 = 37*

RÉPONSE
La calculatrice pourrait montrer 37. »

Le mot « tabelline » fait allusion à la table de multiplication. L'interprétation de l'enchaînement des calculs par une seule et même formule appliquée à une donnée variable fait ici appel à un outil fonctionnel implicite.

5. Une interprétation fonctionnelle explicite qui fait intervenir la notion de variable

Pour exprimer leur idée de fonction, ces élèves ont dû faire intervenir une variable qu'ils ont notée …

Nous avons essayé avec beaucoup de nombres et à la fin nous avons trouvé (… ξ 3 + 10).
Sa calculatrice pourrait montrer que quand Lucia presse 9 il vient 37.

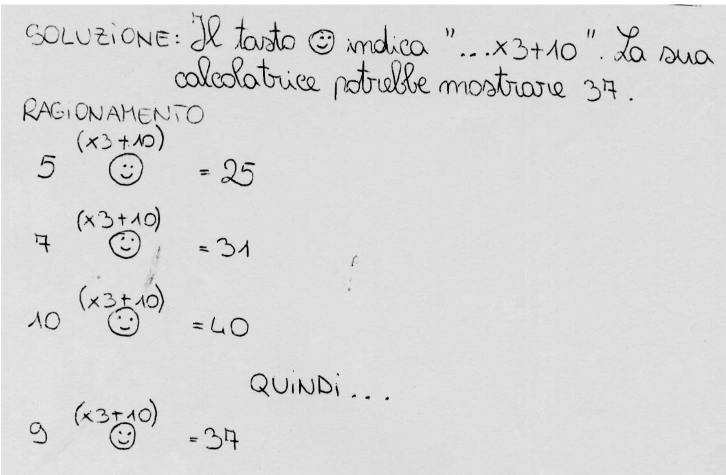
$$25 = 5\ \xi\ 3 + 10$$
$$31 = 7\ \xi\ 3 + 10$$
$$40 = 10\ \xi\ 3 + 10$$
$$37 = 9\ \xi\ 3 + 10$$

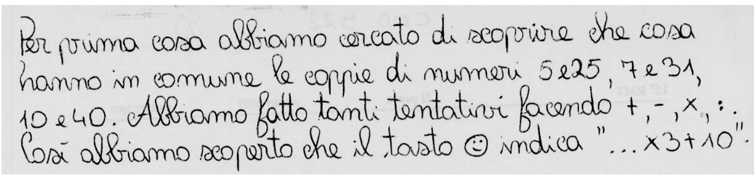
La fonction est ici explicitement donnée par une formule de calcul. Elle l'est aussi dans les deux exemples précédents mais moins ostensiblement, privilégiant l'algorithme de calcul.

Les parenthèses dans les exemples traités révèlent le symbolisme adopté par ces élèves pour écrire cette fonction sous la forme 25 = 5f, signifiant, ainsi que les élèves l'écrivent : « 25 = 5 à qui l'on applique f ».

6. Fonction considérée comme opérateur

SOLUTION : La touche ☺ indique « … × 3 + 10 ». Sa calculatrice pourrait montrer 37.
RAISONNEMENT


SOLUZIONE: Il tasto ☺ indica "...x3+10". La sua calcolatrice potrebbe mostrare 37.
RAGIONAMENTO
5 (x3+10) ☺ = 25
7 (x3+10) ☺ = 31
10 (x3+10) ☺ = 40
QUINDI...
9 (x3+10) ☺ = 37


Per prima cosa abbiamo cercato di scoprire che cosa hanno in comune le coppie di numeri 5e25, 7e31, 10e40. Abbiamo fatto tanti tentativi facendo +, -, x, :. Così abbiamo scoperto che il tasto ☺ indica "...x3+10".

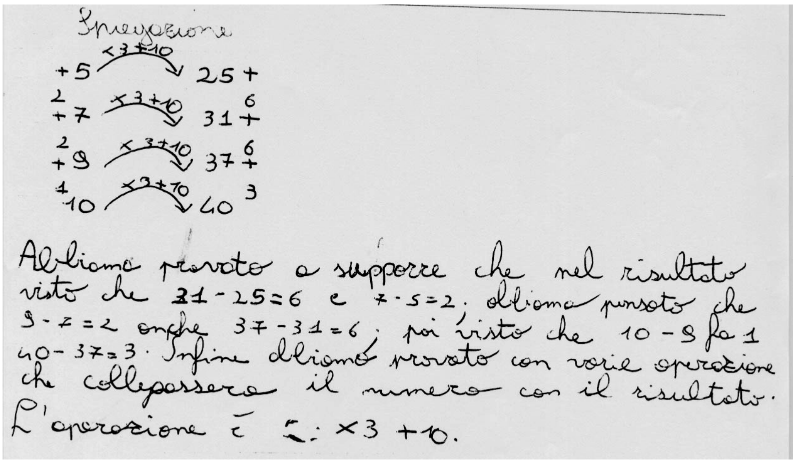
Tout d'abord nous avons cherché à découvrir ce qu'ont en commun les couples de nombres 5 et 25, 7 et 31, 10 et 40.

Nous avons fait des tentatives avec +,–, ×. Ainsi nous avons découvert que la touche ☺ indique … × 3 + 10 ».

De même que dans la copie précédente, pour expliciter la fonction trouvée, les élèves ont besoin de faire intervenir la variable, notée également …

La notion de fonction est ici clairement installée, l'étiquette f (… × 3 + 10) pourrait même figurer sur la touche ☺ comme les élèves l'expriment d'emblée. Mais la compréhension de cette notion franchit un niveau supérieur quand elle est explicitement comprise comme opérant sur les données. Les schémas recopiés sont de ce point de vue sans ambiguïté.

7. Deux points de vue complémentaires : l'étude d'un opérateur affine et de ses variations



Spiegazione

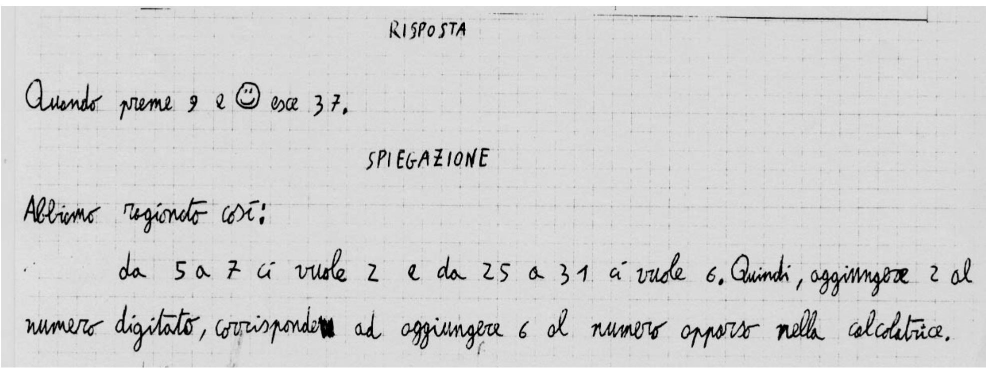
+5 ×3+10 25 +
2 +7 ×3+10 31 + 6
2 +9 ×3+10 37 + 6
1 10 ×3+10 40 3

Abbiamo provato a supporre che nel risultato visto che 31 - 25 = 6 e 7 - 5 = 2. abbiamo pensato che 9 - 7 = 2 anche 37 - 31 = 6. poi visto che 10 - 9 fa 1 40 - 37 = 3. Infine abbiamo provato con varie operazione che collegassero il numero con il risultato. L'operazione è ☺: ×3 +10.

Nous avons remarqué que dans le résultat on voit que 31 – 25 = 6 et 7 – 5 = 2 ; nous avons pensé que 9–7 = 2 de même 37–31 = 6 ; ensuite, vu que 10 – 9 fait 1, 40 – 37 = 3. Enfin nous avons essayé avec diverses opérations de faire correspondre le nombre avec le résultat. L'opération est × 3 + 10.

Le schéma montre clairement que la fonction cherchée est considérée comme un opérateur qui à une entrée fait correspondre une image, toujours calculée par × 3 + 10. Mais, dans leurs explications, les élèves ont fait intervenir les variations de cette fonction affine, repérant la proportionnalité entre les différences des données et celles des images.

8. Exploitation du modèle affine



RISPOSTA

Quando preme 9 e ☺ esce 37.

SPIEGAZIONE

Abbiamo ragionato così:

da 5 a 7 ci vuole 2 e da 25 a 31 ci vuole 6. Quindi, aggiungere 2 al numero digitato, corrisponde ad aggiungere 6 al numero apparso nella calcolatrice.

RÉPONSE : Quand on presse 9 et ☺ on a 37.
EXPLICATIONS : Nous avons raisonné ainsi : De 5 à 7 il va 2 et de 25 à 31 il va 6. Donc, ajouter 2 au nombre tapé, correspond à ajouter 6 au nombre obtenu dans la calculatrice.

Les élèves se placent ici d'emblée dans le cadre affine, repérant sur un couple de données la variation additive de 6 pour l'image, correspondante à la variation de 2 sur les entrées. Ils ne prennent pas le soin de vérifier cette hypothèse sur un autre couple de données, puisque le modèle affine est implicitement admis. Une telle vérification est donc inutile.

Cette stratégie reposant sur l'étude des variations ne suppose pas de concevoir la relation entre données et images en termes fonctionnels. L'égalité des différences entre images pour un même écart entre les données suffit pour résoudre très simplement le problème, comme cela avait été indiqué dans l'analyse a priori. L'étude théorique avait souligné cet écueil du cadre affine qui permet des procédures algorithmiques simples ou des raisonnements de proportionnalité masquant la pertinence de l'outil fonctionnel. La rencontre d'autres fonctions, notamment du second degré, pourra ultérieurement faire rebondir cette problématique.

Bibliographie

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.