Drôle de panneau[1]

Groupe fonction

Mots-clés : Fonction, triangle équilatéral, équation, trinôme du second degré, variations

Le problème

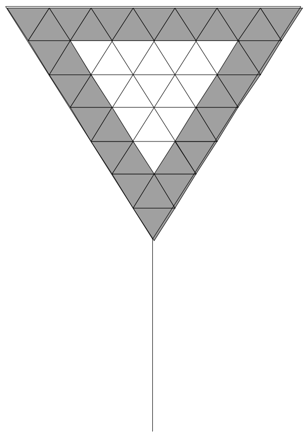
Ce problème propose l’étude d’un triangle équilatéral partagé en triangles unités. Il conduit à l’étude d’un tableau de valeurs ou à celle des variations d’un trinôme du second degré.

Drôle de panneau
Ce panneau triangulaire est formé de petits triangles équilatéraux, tous identiques.

16 d’entre eux forment un triangle intérieur et les 33 autres constituent la bordure extérieure de ce panneau.

Est-il possible de fabriquer un autre panneau triangulaire, de taille différente mais, pour lequel la bordure extérieure, toujours de même largeur, aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieure ?

Expliquez votre démarche et justifiez votre réponse.



Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre ce qu’on entend par « bordure » et « triangle intérieur » en vérifiant les données : 16 et 33 petits triangles.

- Dessiner d’autres figures, constater, au passage, que sur le côté du triangle intérieur il y a toujours 3 petits triangles de moins que sur celui du grand triangle extérieur.

- Remarquer que le nombre de petits triangles équilatéraux qui forment ainsi un grand triangle (son aire en prenant un petit triangle pour unité) est égal au carré du nombre *n* de ces triangles disposés sur un de ses côtés (somme des nombres impairs de 1 à *n*).

- Rassembler ces valeurs pour différentes valeurs de *n* dans un tableau, par exemple :

mesure *n* du côté du triangle intérieur :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
mesure du côté du triangle extérieur :	4	5	6	7	8	9	10	11	12
aire $(n+3)^2$ du grand triangle :	16	25	36	49	64	81	100	121	144
aire n^2 du triangle intérieur (I) :	1	4	9	16	25	36	**49**	64	81
aire $(n+3)^2 - n^2$ de la bordure (B) :	15	21	27	33	39	45	**51**	57	63
différence B – I	14	17	18	17	14	9	2	-7	-21

- L’observation de la dernière ligne mène à la conclusion qui s’impose : il n’y a pas de valeur *n* qui permette d’obtenir un panneau ayant autant de triangles sur la bordure qu’à l’intérieur. C’est pour un triangle intérieur de côté 7 que I et B sont les plus proches (49 et 51). Au-delà, c’est I qui l’emporte (fonction « élever au carré ») sur B (fonction « multiplier par 6 et ajouter 9 »).

[1] Problème 14 de l'épreuve I du 13e rallye, de catégories 7,8,9.

- Ou : par un raisonnement algébrique, montrer que, si les aires I et B étaient égales, du fait que les aires des deux triangles exprimées en petits triangles sont des carrés, on obtiendrait l'équation $(n+3)^2 - n^2 = n^2$, d'où $(n+3)/n = \sqrt{2}$. On serait alors en présence d'une contradiction puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel alors que n est un entier. Ce raisonnement permet d'affirmer qu'il n'y a pas de solution, même pour des bordures plus larges.

- Ou : une étude de fonction du niveau 10 résout simplement le problème : elle consiste à étudier les variations de $(n+3)^2 - 2n^2$, et éventuellement étudier les racines de cette fonction trinôme qui s'écrit $-n^2 + 6n + 9$. La résolution algébrique donne la valeur positive non entière $3(1+\sqrt{2})$, d'où la réponse négative à la question posée.

Dans le cadre fonctionnel, ce problème conduit à un exercice classique d'étude de trinôme. Mais cela ne peut se faire qu'au dernier niveau du RMT.

Résultats

En 2005, ce problème de l'épreuve I du 13è RMT a été traité par 484 classes, réparties entre les catégories 7, 8 et 9. Les scores suivants ont été attribués :

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb classes*	*m*
Catégorie 7	*192*	*40*	*6*	*5*	*4*	*247*	*0,34*
Catégorie 8	*119*	*29*	*19*	*10*	*8*	*185*	*0,70*
Catégorie 9	*48*	*4*	*0*	*0*	*0*	*52*	*0,08*
Ensemble (en %)	*75%*	*15%*	*5%*	*3%*	*2%*	*484*	

Selon les critères de l'analyse a priori du problème :

4 Réponse correcte (impossible) avec une des justifications ci-dessus ou une autre, rigoureuse et détaillée

3 Réponse correcte avec tentative d'explication, par exemple à partir de plus de deux essais, sans erreur de calcul
ou réponse avec justification complète mais avec une erreur de calcul

2 Réponse correcte, donnée à partir d'un ou deux essais seulement

1 Erreurs de calculs menant à l'affirmation qu'il y a une solution ou début de recherche (un ou deux panneaux dessinés) mais sans conclusion
ou réponse correcte sans explication

0 Incompréhension du problème

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Ce problème est posé dans un cadre géométrique et son exploitation pour mettre en évidence les variations relatives des deux ensembles de triangles a été une difficulté non surmontée par beaucoup d'élèves qui n'ont pas fait le choix d'une inconnue.

Les ¾ des classes n'ont pu donner le moindre début de résolution cohérent, pour les raisons qui sont analysées ensuite. Pour les catégories 7 et 8, ce problème s'avère trop difficile. Les outils nécessaires pour une résolution complète n'apparaissent qu'en catégorie 10.

Au niveau 9, on trouve des mises en équations correctes débouchant sur une équation trinôme. La résolution est alors tentée par tâtonnements ou essais numériques organisés comme dans la copie de la figure 1 où une erreur de calcul algébrique n'a pas permis de conclure.

Le raisonnement arithmétique a été observé sur une copie de niveau 9 (figure 2).

$$(n+3)^2 - n^2 = n^2$$
$$n^2 + 6n + 9 - n^2 = n^2$$
$$6n + 9 = n^2$$
$$0 = n^2(-6n+9)$$

n	operation	resultat
1	$1^2(-6\times1+9)$	3
2	$2^2(-6\times2+9)$	-12
3	$3^2(-6\times3+9)$	-81
4	$4^2(-6\times4+9)$	-240
5	$5^2(-6\times5+9)$	-525
6	$6^2(-6\times6+9)$	-972
7	$7^2(-6\times7+9)$	-1617
8	$8^2(-6\times8+9)$	-2496

fig 1 : Mise en équation correcte

Donc pour passer de la partie intérieure à la bordure extérieure, 3 petits triangles ont été ajoutés.

Donc : N = nombre de triangles sur la bordure extérieure.
N^2 = nombre total de triangles.
$N-3$ = nombre de triangles sur la bordure intérieure
$(N-3)^2$ = nombre total de triangle blancs
$N^2-(N-3)^2$ = nombre de triangle sur la bordure

Donc :
$$N^2-(N-3)^2 = (N-3)^2$$
$$N^2-(N^2-6N+9) = N^2-6N+9$$
$$N^2 = 2(N-3)^2$$
$$N = \sqrt{2(N-3)^2}$$
$$N = \sqrt{2}\times(N-3)$$

Or, si on ne peut multiplier un nombre par la racine de 2, car elle est irrationnelle. On ne peut donc pas construire un panneau triangulaire d'une taille différente.

fig 2 : Raisonnement arithmétique

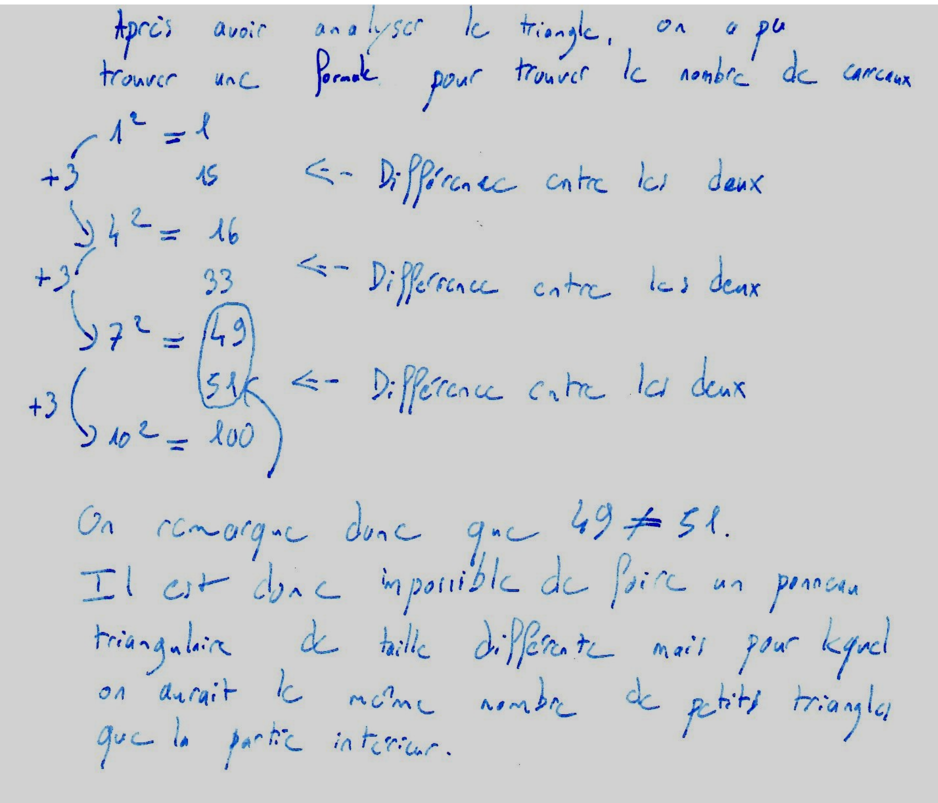
Au niveau 10, les variations des nombres de triangles au centre et sur la bordure permet une conclusion (figure 3). La copie de la figure 4 montre qu'un tel raisonnement peut conduire à une bonne réponse.

Au départ il y a 16 triangles au milieu et 33 pour la bordure puis 51 à l'intérieur et 49 à la bordure puis 69 en bordure et 100 à l'intérieur.
Le moment où s'approche le plus est le 2e puis par la suite on s'en éloigne de plus en plus donc c'est impossible.

fig 3 : Etude des variations des nombres de triangles au centre et sur la bordure

Exploitations didactiques

Lors d'une activité en classe, pour amener les élèves à observer les variations des deux ensembles de triangles, on peut donner une planche de panneaux de différentes tailles dans lesquels les élèves sont appelés à dessiner les bordures et compter les petits triangles, comme pour ceux de la figure 5.



Après avoir analyser le triangle, on a pu trouver une formule pour trouver le nombre de carreaux

$1^2 = 1$

+3 15 <- Différence entre les deux

$4^2 = 16$

+3 33 <- Différence entre les deux

$7^2 = 49$

51 <- Différence entre les deux

+3 $10^2 = 100$

On remarque donc que $49 \neq 51$.

Il est donc impossible de faire un panneau triangulaire de taille différente mais pour lequel on aurait le même nombre de petits triangles que la partie interieur.

fig 4 : Avec bonne réponse

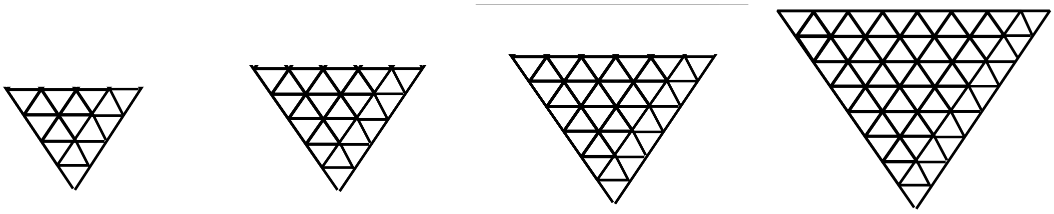


fig 5 : Pour l'observation des variations

Ce qui donne de beaux coloriages, mais ne conduit pas les élèves à changer spontanément de cadre pour une interprétation algébrique.

On peut aussi donner un tableau de valeurs à compléter, avec la question : le nombre de la dernière case peut-il être nul ?

Nombre n de petits triangles sur le côté	3	4	5	6	7	8	9	10	…	n
Nombre de petits triangles dans le panneau					49					
Nombre de petits triangles à l'intérieur du panneau					16					
Nombre de petits triangles sur la bordure					33					
Différence Bordure – intérieur										

La plupart des élèves ayant reçu ce tableau le complètent correctement jusqu'à la dernière colonne qui leur donne l'équation clé (figure 6).

Nombre de petits triangles sur le côté	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
Nombre de petits triangles dans le panneau	9	16	25	36	49	64	81	100	121	n^2
Nombre de petits triangles à l'intérieur du panneau	0	1	4	9	16	25	36	49	64	$\cancel{36}$ $n(-3)^2$ $(n-3)^2$
Nombre de petits triangles sur la bordure	9	15	21	27	33	39	45	51	57	$n^2-(n-3)^2$
Différence Bordure – intérieur	9	14	17	18	17	14	9	2	−7	$n^2-(n-3)^2-(n-3)^2$

Le nombre de la dernière case peut-il être nul ?

$$n^2-(n-3)^2-(n-3)^2=0$$

Ceci est impossible.

fig 6 : Tableau complété

L'obstacle de la résolution algébrique de cette équation les conduit à cette conclusion non justifiée. A ce niveau, les élèves pensent que seules les équations du premier degré peuvent être résolues formellement.

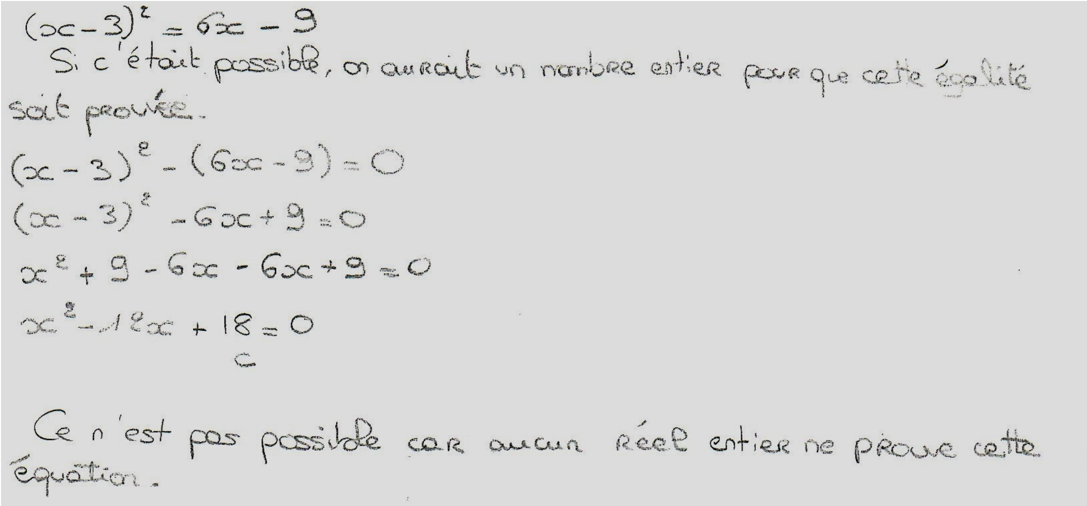
Pour aller plus loin

Ce problème a été donné à Besançon en 2009-2010 dans 4 classes de niveau 9 et 3 classes de niveau 10, dans le cadre d'une expérimentation en situation réelle de rallye, avec les aménagements didactiques précisés ci-dessous. Parmi les copies recueillies, certaines conduisent aux remarques qui suivent.

- La clé de ce problème réside dans un changement de cadre, allant de l'analyse fine du contexte géométrique à la mise en équation à partir du choix d'une variable entière. Un calcul algébrique correct aboutit à une équation du second degré dont on cherche les éventuelles solutions entières. Aux niveaux 9 et 10, les élèves n'ont pas les outils pour cette résolution et doivent se contenter d'une simple affirmation (figure 7).

- En écrivant ces formules, les élèves mettent en jeu des fonctions, mais de manière implicite, restant dans le cadre algébrique, sans que la notion de fonction soit explicitée, sauf dans quelques copies comme celle de la figure 8 de niveau 10. Mais cette notion est trop nouvelle pour être opératoire.

- Certains contextes sont susceptibles de concerner l'idée d'un lien fonctionnel se situant dans l'implicite à un niveau intuitif très vague. Il s'agit alors de faire passer les élèves de cette appréhension de l'*idée* de fonction à la *notion* plus explicite de fonction comme outil de résolution du problème. Cet objectif suppose donc d'avoir à considérer une relation entre des variables qui soit générale, tout en restant à la portée des élèves et ayant du sens par rapport au contexte habillant le problème. Cette introduction explicite de grandeurs variables devrait permettre de rendre nécessaire l'expression d'une loi modélisant la situation pour atteindre le niveau notionnel souhaité.



$(x-3)^2 = 6x - 9$

Si c'était possible, on aurait un nombre entier pour que cette égalité soit prouvée.

$(x-3)^2 - (6x-9) = 0$

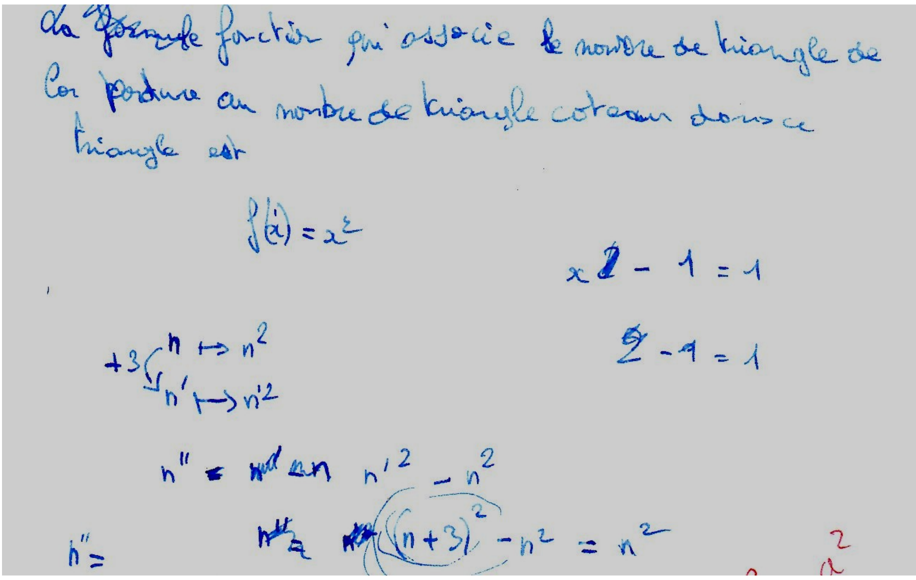
$(x-3)^2 - 6x + 9 = 0$

$x^2 + 9 - 6x - 6x + 9 = 0$

$x^2 - 12x + 18 = 0$

Ce n'est pas possible car aucun réel entier ne prouve cette équation.

fig 7 : Affirmation



La ~~formule~~ fonction qui associe le nombre de triangle de la bordure au nombre de triangle cotenu dans ce triangle est

$f(x) = x^2$

$x^2 - 1 = 1$

$2 - 1 = 1$

$+3 \quad n \mapsto n^2$

$n' \mapsto n'^2$

$n'' = n'^2 - n^2$

$n'' =$

$(n+3)^2 - n^2 = n^2$

fig 8 : Fonction explicitée

- Il existe divers outils pour la mise en œuvre d'une solution se situant dans le cadre fonctionnel : tableaux, représentations graphiques, lois ou formules, traitements algébriques, etc. Cependant ces types de résolutions ne sollicitent pas le même degré d'abstraction et s'ordonnent hiérarchiquement selon la complexité et le degré d'abstraction nécessaire à chacune. Le couple objet-image relève d'une abstraction élevée et n'est pas spontané. Il s'agirait donc de repenser le statut de ce couple dans les problèmes proposés.

Bibliographie

Henry, M. Le concept de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 6, Parma 2006. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, ARMT, 2007, p. 151-168.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.