LES NOMBRES DE MONSIEUR TRAPÈZE

Michel Henry, Angela Rizza

Pour le Groupe Fonctions[1]

Identification

Rallye: 18-I, 13

Catégories: 6, 7, 8, 9, 10

Domaine conceptuel: Arithmétique, Algèbre, Fonctions

Familles de tâches pour la résolution : Recherche de régularités. Comptage et opérations dans N, nombres figurés, élaboration et utilisation d'une formule, suites numériques.

Résumé

Étant donné la suite des 44 premiers entiers naturels disposés en trapèze (sur la première ligne 0, 1, 2, sur la seconde ligne 3, 4, 5, 6, 7), trouver le dernier nombre de la trentième ligne.

Énoncé du problème

Monsieur Trapèze écrit les nombres naturels depuis 0, très régulièrement, en lignes et en colonnes, dans cette disposition en forme de trapèze :

					0	1	2					
				3	4	5	6	7				
			8	9	10	11	12	13	14			
		15	16	17	18	19	20	21	22	23		
	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	
35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	….	….	….

…. …. …. …. …. …. …. …. …. ….

Arrivé à 44, il fait une pause et constate qu'il est à la 6^e ligne, où il manque encore trois nombres.

Il décide d'écrire en tout 30 lignes complètes.

Quel sera le dernier nombre qu'il écrira dans sa 30^e ligne ?

Expliquez votre raisonnement.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

Domaine arithmétique

- Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne, voire la septième. (En procédant ainsi, ligne par ligne, on peut arriver au dernier nombre de la 30^e ligne (959). Comptage dans N.
- Ou : rechercher des régularités pour passer d'un terme au suivant d'une suite choisie qui traverse le trapèze de ligne en ligne (dans une colonne : + 4 ; + 6 ; + 8 ; + 10 ; + 12… ; … ; parallèlement au côté droit du trapèze : + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11 ; ... ; parallèlement au côté gauche du trapèze : + 3 ; + 5 ; + 7 ; + 9 ; + 11) ; et compléter l'alignement un à un des termes de la suite où la régularité a été observée, jusqu'à la 30^e ligne. *Régularité arithmétique : sommes termes à termes*.
- Ou : passer à des calculs de sommes de 30 termes issues des régularités observées. Par exemple, le 30^e nombre de la colonne centrale est : 1 + 4 + 6 + 8 + … + 60 = 929, puis, comme dans la 30^e ligne, il y a 61 nombres, celui du milieu est suivi des 30 entiers suivants. Le dernier nombre de la 30^e ligne est donc 929 + 30 = 959. *Régularité arithmétique : sommes partielles*.
- Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme : 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959. *Régularité arithmétique : sommes et produits.*

[1] Le groupe "Fonctions" qui a analysé ce problème dans le cadre de la rencontre ARMT de Luxembourg en 2013, était composé de Lucia Argilla, Maria Cristina Bonomi, Sandro Deplano, Valeria Ferrari, Mathias Front, Annie Henry, Michel Henry, Rosa Iaderosa, Ana Paula Jahn, Francesca Ricci, Angela Rizza.

Domaine des fonctions (algèbre)

- Ou : généraliser l'une ou l'autre des régularités observées précédemment par une procédure fonctionnelle. Par exemple, la plus simple est d'identifier le deuxième nombre de la ligne n par n^2 ; ou observer que la colonne du « 2 » contient les nombres de la forme $n(n + 1)$ .... Par exemple, comme le 2^e nombre de la ligne n est n^2, on peut aller à la 31^e ligne, trouver $31^2 = 961$, puis « reculer » de 2 pour arriver au dernier nombre de la 30^e ligne : 959. Pour toutes ces procédures, on peut faire appel à des tableaux ou des listes organisées. *Régularité, généralisation.*

Domaine arithmétique (géométrie)

- Ou : calculer l'aire du trapèze avec pour petite base la première ligne constituée de 3 nombres et pour grande base la trentième ligne constituée de 61 (= 2 x 30 + 1) nombres et pour hauteur 30 lignes. Ainsi on obtient (3 + 61) x 30/2 = 960. il faut enfin enlever 1 puisque le comptage part de 0. *Formule de l'aire du trapèze*.
- Ou bien, si on transforme le trapèze en triangle en ajoutant une case comme première ligne, on obtient la configuration des nombres figurés triangulaires de $n + 1$ lignes, avec une ligne de plus que pour le trapèze. Les nombres situés à la fin des lignes sont les carrés des entiers successifs. Le nombre des cases sera donc 31 x 31 = 961. En éliminant la case ajoutée et celle contenant le zéro on obtient 959 dans la dernière case. *Nombres figurés.*

Domaine des fonctions

- Ou bien développer un algorithme opérant en même temps sur la ligne et sur la somme des nombres. Partir de l'effectif R_n des nombres de la ligne n donnée : $R_n = R_{(n-1)} + 2$. Le dernier nombre S_n de la ligne n est obtenu comme somme $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ avec $S_0 = -1$, $S_1 = 2$ ($S_1 = S_0 + R_1 = -1 + 3 = 2$), $S_2 = 7$. *Suite définie par récurrence.*

Mots-clés

Nombres figurés, régularité arithmétique, régularité algébrique, suites numériques, fonctions.

Points attribués

Points attribués	0	1	2	3	4	Nombres de classes	m
Cat 6, en %	51	19	9	13	8	872	1.1
Cat 7, en %	30	17	13	20	20	709	1.8
Cat 8, en %	20	16	11	20	33	462	2.3
Cat 9, en %	19	14	6	23	38	144	2.5
Cat 10, en %	15	11	8	13	53	109	2.8
Nombres de classes	784	396	236	400	480	2296	1.7

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 La réponse 959 avec explication de la démarche (pas à pas, par suite, par fonction ...)

3 La réponse 959 sans explication ou avec une démarche peu claire
ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...)

2 Découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

La moyenne des points attribués par catégories (sur 2296 classes) augmente sensiblement de la catégorie 6 à la catégorie 10 dont le succès est quasi total.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Pour les quatre sections FC, SR, PR et CA dont nous avons examiné les copies, nous avons fait les remarques suivantes sur l'attribution des points :

Les « 0 pt » (34% du total des copies, de 51% à 15% de la catégorie 6 à la catégorie 10)

Cette « incompréhension du problème » se manifeste par quelques feuilles blanches, des trapèzes partiellement construits (de 10 à 15 lignes complètes) avec beaucoup d'erreurs (imprécisions dans l'alignement des colonnes) et, surtout, par des **procédures faisant appel à la linéarité** du genre : *on remplit le trapèze jusqu'au dernier nombre de la dixième ligne puis on multiplie par 3 pour trouver le dernier nombre de la trentième ligne (ou jusqu'à la 15^e ligne, suivi d'une multiplication par 2 ; ou jusqu'à 47, dernier nombre de la 6^e ligne pour trouver 235 = 47 x 5 comme réponse*).

Ces **procédure linéaires** ne se rencontrent pas en catégorie 8, on en dénombre 10% en catégorie 7 et près de 20% en catégorie 6.

Autres symptômes d'incompréhension rencontrés en catégorie 6 : des multiplications dont l'un des facteurs est le nombre total de lignes (30) ou du nombre de lignes encore à compléter (24) comme 1128 = 47 x 24, 900 = 30 x 30.

Exemple, PR 631

L'ultimo numero della trentesima riga è 1128. Prima, abbiamo trovato l'ultimo numero della sesta riga, cioè 47, poi l'abbiamo moltiplicato per 24 e è risultato questo numero.

Les « 1 pt » (17% du total des copies, stable, de 17% à 11% de la catégorie 6 à la catégorie 10)

Le « début de raisonnement correct » a été parfois difficile à différencier du « 0 pt » ou du « 2 pts ».

A Besançon, nous avons attribué ce « 1 pt » aux copies qui présentent une succession régulière de nombres alignés dans le trapèze (en général sur le bord droit ou, moins souvent, dans la colonne commençant par 0) et qui ont constaté et écrit explicitement la « constance (2) des écarts des écarts » successifs. Par exemple, les derniers nombres des lignes sont 2, 7, 14, 23, 34, ..., les écarts successifs sont 5, 7, 9, 11, et les écarts de cette dernière suite sont constants : 2.

La constante 2 se retrouve aussi comme différence entre les nombres de termes par ligne : 3, 5, 7, 9, ... dont il s'agit de calculer les totaux partiels jusqu'à la 30^e ligne.

Malgré des explications parfois claires sur la procédure à suivre, par perception de la régularité, les groupes d'élèves ayant reçu « 1 pt » n'ont pas été capables de conduire les calculs très loin. Ils savent quelle addition effectuer mais ne peuvent aboutir en raison du nombre élevé de termes et car ils ne savent pas où s'arrêter.

Les « 2 pts » (10% du total des copies, stabilité d'une catégorie à l'autre)

Le critère « découverte explicite de nombres de la dernière ligne mais erreurs successives au sein de la ligne » ne répond à aucune des copies examinées. A Besançon puis pour la vérification des copies de Parma, nous l'avons adapté et avons accordé les « 2 points » aux procédures bien explicites et bien engagées mais comprenant deux ou trois erreurs, de calcul ou de détermination de la dernière ligne ou du dernier nombre de la ligne.

Il faut relever ici la difficulté du relevé des erreurs pour distinguer l'erreur unique des erreurs diverses ou répétées. Par exemple, dans la construction du trapèze, au-delà des dix premières lignes, une première erreur peut apparaître en vérifiant si le deuxième nombre de la ligne est un carré. Au cas où l'on décèle une première erreur, en général d'une unité, celle-ci peut se reporter sur les lignes suivantes mais aussi être « aggravée » d'une deuxième ou d'une troisième inattention.

Les « 3 pts » et « 4 pts » (38% du total des copies)

Nous regroupons les copies des deux groupes « 3 et 4 points » dans notre analyse car elles ne diffèrent pas sensiblement du point de vue des procédures adoptées et correspondent aux critères : « la réponse 959 avec explication de la démarche » et « la réponse 959 sans explication ou avec une procédure peu claire », ou une procédure correcte mais « avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante...) ».

L'explication figure d'ailleurs dans toutes les copies ayant reçu de 1 à 4 points et c'est en fait plutôt « l'efficacité dans les calculs » qui a été mesurée pour ce problème de *Monsieur Trapèze*,

Parmi les « 3 pts », il faut relever les procédures correspondant à la seconde alternative du critère : ou une démarche clairement exprimée mais avec une seule erreur de calcul (addition, confusion avec la ligne précédente ou suivante ...).

Cette « seule erreur » peut être la confusion entre « nombre de nombres » du trapèze sur les 30 premières lignes et « dernier nombre de la 30^e ligne » qui diffèrent de 1 car la numérotation commence à 0 et non à 1. Dans ce cas la réponse est 960.

Elle peut aussi être 1022 (31^e ligne) ou 898 (29^e ligne) correspondant à une erreur de comptage des lignes.

Lorsque tous les calculs sont présentés, il peut encore s'agir d'une seule erreur dans les additions successives.

Le dernier cas concerne une interprétation erronée de l'énoncé consistant à penser que M. Trapèze va encore écrire 30 lignes après la sixième alors qu'il s'agit de 30 lignes en tout (y compris les six premières après lesquelles il a fait une pause). On ne peut pas retirer plus d'un point pour cette interprétation du texte qui aurait pu être plus clair. Dans cette seconde interprétation, la réponse serait 1367.

Analyse des procédures utilisées

Sur la base de la description dans les tâches, les algorithmes sont classés (tableau 2) en vue de déterminer leur fréquence par catégorie et d'examiner l'impact de l'algorithme le plus fréquent sur les réponses correctes.

Le tableau 1 montre les données de la section de Cagliari où on identifie que l'algorithme qui a une fréquence plus élevée est A2.

	A0	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Tot
Cat 6	3	2	3	0	0	0	0	0	0	8
Cat 7	2	2	2	0	0	0	0	0	0	6
Cat 8	1	3	1	0	0	0	1	0	0	6
Cat 9	3	2	6	0	0	0	2	1	1	15
Cat 10	0	1	5	2	0	1	0	5	0	14
	9	10	17	2	0	1	3	6	1	49

Tableau 1

Numéro de la procédure	Nom de la procédure	Comportement observé par les correcteurs.
A0	Procédure inadaptée ou pas de procédure	Incompréhension du texte et des règles.
A1	Règle de construction	Comprendre la règle de construction et éventuellement compléter la sixième ligne et voire la septième ligne. (En procédant ligne par ligne et en s'armant de patience, on peut obtenir le dernier numéro de la 30-ème ligne (959), peut-être avec quelques erreurs).
A2	Recherche de régularité	Rechercher des régularités entre les termes successifs d'une suite couvrant le trapèze de haut en bas (dans une colonne: + 4, + 6, + 8, + 10, + 12, ..., parallèlement au côté droit du trapèze + 5, + 7 + 9 + 11, ..., parallèlement au côté gauche du trapèze + 3, + 5, + 7 + 9 + 11, ...) et compléter l'alignement qui a été observé jusqu'à la 30-ème ligne. (Ceci est encore répétitif et sujet à des erreurs ou des oublis.)
A3	Calculer la somme de 30 termes	Calculer les sommes de 30 termes basés sur les régularités observées. Par exemple, le 30-ième nombre de la colonne centrale est le suivant: 1 + 4 + 6 + 8 + ... + 60 = 929 ; puis, étant donné que dans la 30-ème ligne il y a 61 nombres, le nombre médian est suivi par 30 nombres entiers successifs. Le dernier nombre de la 30-ème ligne est donc 929 + 30 = 959.
A4	Transformer des sommes en produits	Par exemple, la séquence de termes de la suite à droite donne comme dernier terme: 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) = 2 + 66 + 66 + 66 ... + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.
A5	Fonctions –suites	Généraliser l'une des régularités observées précédemment, au moyen d'une procédure fonctionnelle. Par exemple, le plus simple est d'identifier le second terme de la ligne n avec n^2; ou observer que la colonne de "2" contient les nombres de la forme n(n + 1). Par exemple, parce que le second terme de la ligne n est n^2, vous pouvez aller à la 31-ème ligne, trouver $31^2 = 961$, puis reculer de 2 pour obtenir 959.
A6	Figures	Les nombres du trapèze sont considérés comme des zones carrées. On calcule l'aire du trapèze et on doit retirer un seul carré, celui associé au 0. Cette procédure est à relier avec l'utilisation des nombres figurés.
A7	Récursivité – suites	Pour obtenir le résultat on peut développer un algorithme fonctionnant simultanément sur la ligne et sur la somme des nombres. On part de la description des nombres de la ligne de données à partir de $R_n = R_{(n-1)}+2$. Celles-ci sont reliées au nombre final obtenu comme somme de $S_n = S_{(n-1)} + R_n$ avec $S_0 = -1$, $S_1= 2$: $S_1 = S_0 + R_1 = -1 +3 = 2$, $S_2=7$.
A8	Réponse sans procédure évidente	La réponse 959 sans explication

Tableau 2

Il est significatif de comparer les procédures dans les cas où 3 points ont été attribués, majorité des scores obtenus dans les catégories 6, 7, 8.

Puisque la description de la tâche attribuait 3 points dans les trois cas distincts :

- Réponse correcte sans explication
- Réponse correcte avec une procédure peu claire
- Procédure correcte clairement expliquée avec une seule erreur de calcul.
- Cela privilégie l'erreur de calcul par rapport aux explications : correcte sans explication ou correcte avec une procédure peu claire.

		Distribution du score 3																										
		A1			A2			A3			A4			A5			A6			A7			A8			Totaux		
Categorie	Nombre de productions	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul	Sans explication	Peu clair	Erreur de calcul
6	3			1		1	1																			0	1	2
7	3			1			2																			0	0	3
8	3						2												1							0	0	3
9	6			1		1	2															1	1			1	2	3
10	3						1									1			1							0	0	3
Totaux	18	0	0	5	0	2	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0	1	3	14
		3			10			0			0			1			2			1			1			18		

Pour aller plus loin

A. Méthode « pas à pas ». *Règle de construction.*

Comme le prévoyait l'analyse a priori du problème, il y a eu quelques tentatives de compléter le trapèze jusqu'à la 30e ligne, tentatives qui ont toutes échoué en raison des dimensions du tableau. En effet les difficultés de la méthode « un à un » arrivent vers la dixième ligne, là où les nombres ont trois chiffres.

Deux ou trois groupes ont « rallongé » leurs feuilles par collages pour arriver à y placer les lignes. En effet les difficultés de la méthode « un à un » arrivent vers la dixième ligne, là où les nombres ont trois chiffres, sont plus que vingt et ne s'écrivent plus directement « sous » ceux de la ligne précédente ; on manque d'espace ou il faut écrire les nombres trop petits et, surtout, on manque de repères verticaux car, même sur une feuille quadrillée, on est obligé de déborder des carreaux prévus au début.

Pour construire un trapèze entier dans une feuille quadrillée de 4mm x 4 mm et de format A4, il faudrait tout d'abord choisir d'écrire les lignes dans le sens de la longueur de la feuille après s'être rendu compte que la 30e ligne aura 61 termes, s'assurer qu'il y aura bien 30 carreaux dans le sens de la largeur et 62 dans le sens de la longueur pour déterminer les « mailles » du tableau.

Cette procédure qui paraît « primitive » à première vue, exigerait en réalité une maîtrise préalable des dimensions du trapèze complété et des contrôles réguliers au cours du remplissage car écrire les nombres de 0 à 959 sans en oublier un est une tâche très exigeante en attention.

Dans les copies d'élèves, les procédures « pas à pas » ne vont en général que jusqu'à la sixième ligne dont il suffit de compléter les trois derniers termes, ou est rarement au-delà de la dixième ligne.

Dans ces derniers cas, les élèves doivent : soit changer de procédure, soit remplacer les nombres par des points (voir 761 et 672 à scanner), soit trouver une méthode qui paraît plus courte mais qui est erronée en faisant appel aux propriétés de linéarité (déjà mentionnées sous « 0 pt »).

B. Prise en compte de régularités de la suite des derniers nombres des lignes (sur le côté droit du trapèze).
Recherche de régularités

Cette procédure était mentionnée dans l'analyse a priori (§2) mais sans présager qu'elle serait très majoritaire. Sa fréquence est estimée à 60% des cas où une régularité a été observée.

C'est a posteriori que l'on se rend compte de son évidence ;

- les élèves savent que le nombre cherché sera sur la trentième ligne du trapèze, à droite et que le « chemin » le plus naturel pour s'y rendre est de suivre le côté droit, de la zone connue, en haut, vers le bas
- les cinq premiers nombres du côté droit sont donnés et le sixième est facile à déterminer

termes :	2	7	14	23	34	47	...

- En observant les écarts successifs entre ces nombres, on constate qu'il s'agit de la suite des nombres impairs à partir de 5 dont la raison (2) est évidente :

termes :	2		7		14		23		34		47		...	
écarts :		5		7		9		11		13		15		....

- Il suffit alors d'imaginer que la régularité se poursuivra et de procéder par additions successives de nombres impairs : 47 + 15 = 62 ; 62 + 17 = 79 ; 79 + 19 = 98 ; ...

Une majorité de copies font apparaître cette succession d'additions ou, sans les signes d'opérations, les successions correspondantes de termes, en particulier. à partir de 47, la suite 62, 79, 98, 119, 142, 167, ..., qui parfois s'arrête à 898 ou à 1022 au lieu de 959.

Ce dernier type d'erreur révèle la principale difficulté de la procédure : trouver le 30^e nombre de la suite ou, en termes d'efficacité, savoir où il faut s'arrêter.

Les copies ne sont en général pas explicites à ce propos, On imagine que, parfois, les lignes sont comptées au fur à mesure de l'écriture des termes, calculés à la calculatrice par l'addition des nombres impairs successifs. Dans quelques cas le dernier nombre à additionner, 61, semble avoir été déterminé à l'avance, comme 30^e nombre impair à partir de 3.

Une autre difficulté de la procédure, comme de toutes celles qui reconstituent une suite de nombres, est le contrôle des résultats, qui demande une attention permanente. Nous ne pouvons pas savoir par les copies comment ce contrôle a été exercé ; nous savons seulement que, globalement, la réponse 959 a été obtenue par 18% des groupes (« 4 pts »), que 12% ont commis une seule erreur (« 3 pts »), et 10% de deux à trois erreurs (« 2 pts »).

Cette proportion importante d'erreurs laisse supposer une insuffisance de la coopération au sein des groupes : un seul de ses membres se chargeant des calculs et les autres acceptant les résultats sans contrôle ni regard critique ou encore ne se sentant plus concerné par l'avancement de la suite.

C. Prise en compte de régularités dans la suite des nombres de la colonne 0, 4, 10, 18, ...

La procédure est la même que précédemment, avec une difficulté supplémentaire : arrivé à la ligne 30, il faut encore la suivre jusqu'à son extrémité à droite. Cette procédure figure aussi dans l'analyse a priori (2^e §). Nous ne l'avons observée que dans trois copies l'une seule ayant abouti à la réponse 959.

D. Autres procédures par suites de nombres.

On s'attendait à ce que des élèves remarquent la suite des carrés 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; ... de la deuxième ligne en oblique depuis la gauche. Elle n'a été observée qu'une seule fois et a conduit à une procédure fonctionnelle.

C'est manifestement la plus simple des procédures qui, sous forme rhétorique, s'exprime par « calculer le carré du nombre qui indique la ligne suivante et soustraire 2 » et sous forme algébrique par $f : n \longrightarrow f(n) = (n + 1)^2 - 2$ où n est le rang de la ligne, $n \in \mathbf{N}$.

E. Calcul des nombres de termes par ligne

Cette procédure n'a pas été envisagée par l'analyse a priori, elle est cependant assez fréquente. On estime qu'elle a été choisie dans 30% des cas où les élèves ont cherché à poursuivre des régularités.

Elle repose sur un constat assez évident, a posteriori : le dernier nombre de la trentième ligne est en relation étroite avec le nombre total de termes puisqu'il s'agit de la liste des nombres naturels ! Qu'ils soient disposés « en trapèze » ou en ligne n'a pas d'importance. Cette « relation étroite » est simple : le dernier nombre vaut un de moins que la nombre de termes, puisque la suite des nombres naturels commence par 0.

Dans cette conception du « dernier nombre d'une ligne », il n'y a pas besoin d'observer les écarts de la suite sur le côté droit (2 ; 7 ; 14 ; 23 ; ...) ; il suffit de compter les nombres de chaque ligne : 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; ... et/ou de constater qu'il y a à chaque ligne deux termes de plus qu'à la ligne précédente pour se convaincre que le nombre total des termes sera la somme des 30 nombres impairs à partir de 3.

On retrouve la suite de la procédure B où l'on remplace « terme » par « nb tot de termes » partant de 3 (au lieu de 2) et « écarts » par « nb de termes d'une lignes » et où l'on intervertit les deux lignes :

nb termes /ligne :	3		5		7		9		11		13		15	....
nb tot. termes :		3		8		15		24		35		48		...

Les sommes successives conduisent ici à 960, termes dans le tableau de 30 lignes, dont il faut enlever 1 pour arriver au dernier terme de la 30^e ligne : 959.

F. procédures par transformations de sommes en produits

L'analyse a priori (§4) proposait : « *Ou : transformer des sommes de 30 termes en produits. Par exemple, la suite des termes du côté gauche donne comme dernier terme : 2 + 5 + 7 + 9 + ... + 59 + 61 = 2 + (5 + 61) + (7 +59) + (9 + 57) + ... + (31 + 35) + 33 = 2 + 66 + 66 + ... 66 + 33 = 2 + 14 × 66 + 33 = 35 + 924 = 959.* »

Aucune trace d'une telle transformation n'a été trouvée dans les 271 copies examinées !

On peut se demander alors pourquoi les élèves ne voient pas la simplification d'une telle transformation de somme en produit et pourquoi ils se lancent dans une trentaine d'additions successives avec un risque très élevé d'erreur ?

Nous ne pouvons qu'esquisser quelques hypothèses :

- obstacle didactique de la méconnaissance ou de l'ignorance de la commutativité et de l'associativité de l'addition, ainsi que de la distributivité (factorisation) de la multiplication sur l'addition : la tradition scolaire veut qu'on opère toujours de gauche à droite, le signe « = » signifie « ça fait », ...
- obstacle du dernier terme de l'addition, qui doit être déterminé préalablement pour être en mesure d'imaginer une procédure plus simple ;
- obstacle épistémologique de la distributivité et plus généralement des relations entre addition et multiplication.
-

G. procédures fonctionnelles

On arrive ici à la problématique de la construction du concept de fonction. *Monsieur Trapèze* est un des nombreux problèmes du RMT dont le but est de déterminer (pour parodier M de la Fontaine) « Comment l'esprit vient aux filles. et évidemment aux garçons » ou « comment s'installe le concept de fonction ».

La récolte est fort modeste ici : quatre copies (sur 400 examinées) font état d'un lien direct entre le numéro de la ligne et son dernier nombre.

La carence de procédures fonctionnelle est assez surprenante. On peut se demander pourquoi un seul groupe a remarqué la suite des carrés et en a tiré immédiatement que le nombre cherché vaut 2 de moins que $961 = 31^2$? qui se trouve en deuxième position de la ligne 31.

Est-ce dû au fait que la variable n'apparaît pas clairement dans la situation ?

Si l'on présentait explicitement la recherche sous forme d'une « machine » :

Nombre à l'entrée :	1	2	3	4	...	6	7	...	9	...	30
Nombre à la sortie		2	7	14	23	...	47	62	....	98	?

La recherche de la fonction ne s'organiserait-elle pas plus facilement, l'élève sachant qu'il doit trouver « l'image de 30 » ?

Lors de l'examen des copies, nous nous sommes encore posé d'autres questions sur le statut des découvertes de régularités dans les suites. Certains groupes proposent parfois des règles de progression à partir d'un seul couple de nombres successifs. Par exemple : « *on a vu que dans la suite 5 ; 7 ; ... il y a 2 de différence, alors il y aura toujours 2 d'un nombre au suivant* ».

Dans les copies de la section de Parme, nous avons trouvé à quatre reprises une procédure que l'on pourrait qualifier de « fonctionnelle » avec quelques réserves toutefois : les élèves considèrent le trapèze au sens propre de la figure géométrique et non au sens figuré de la disposition des nombres et calculent son aire à l'aide de la formule $(b + B) * h/2$. Cette procédure fonctionne dans le cas précis de la disposition de M. Trapèze (en fait, c'est la même formule que la somme des nombres d'une progression arithmétique de 30 termes, de raison 2 dont le premier terme est 3 et le dernier 61) :

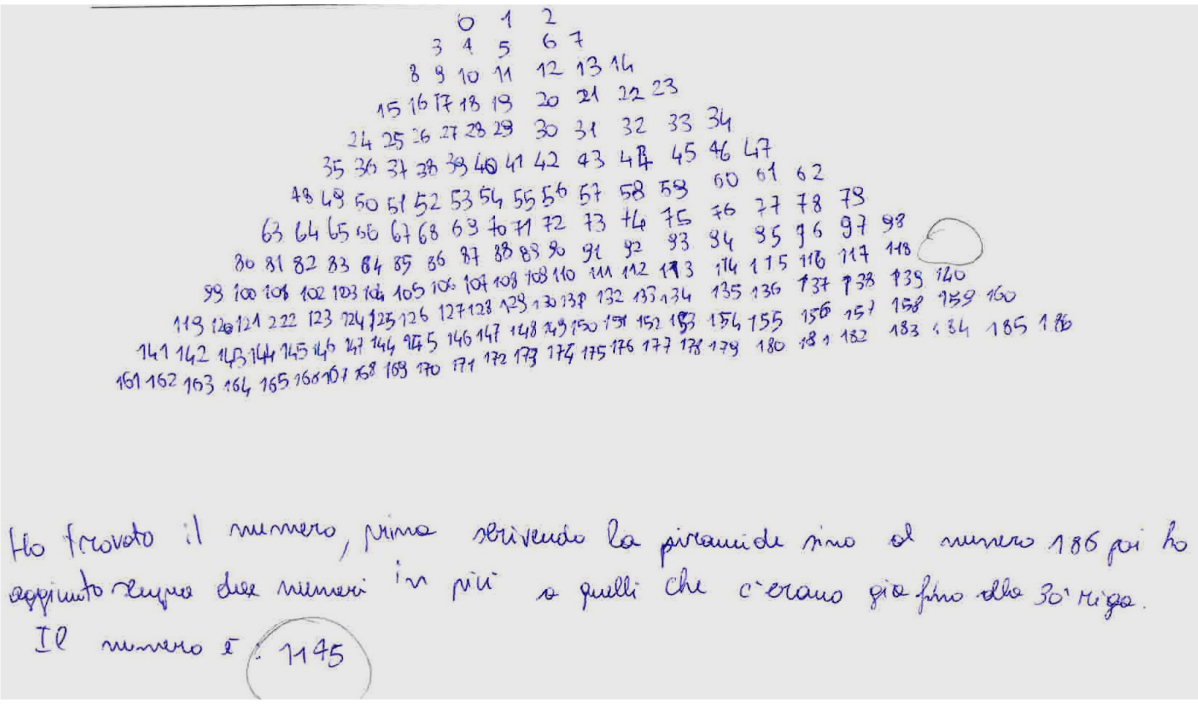
PR 744 : « *Nous avons remarqué qu'en appliquant la formule de l'aire du trapèze $(b + B) \times h/2$, on obtient toujours le nombre suivant le dernier nombre de la grande base du trapèze. Ainsi nous avons trouvé le trente et unième nombre impair (car nous avons remarqué que le nombre des nombres de chaque ligne est égal au nombre impair qui parmi les nombres impairs est le nombre suivant le numéro de la ligne, par exemple pour la première ligne, le second nombre impair donc trois nombres) qui est 61 donc nous avons fait l'opération suivante :*

$(61 + 3) \times 30 / 2 = 960$, puis $960 – 1 = 959$.

Annexes

Quelques exemples de copies

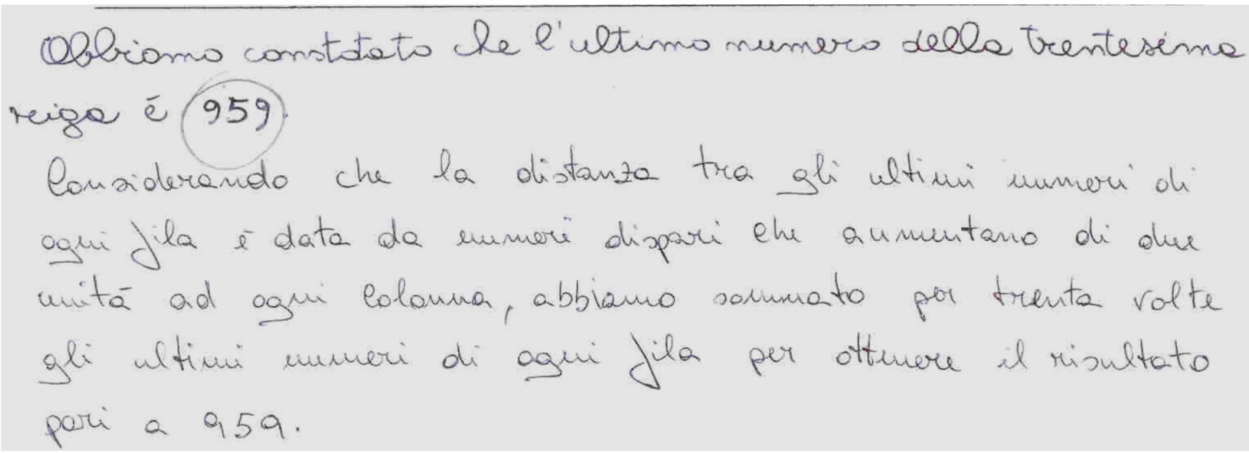
1. Procedure : Règle de construction avec erreur de report.



0 1 2
3 4 5 6 7
8 9 10 11 12 13 14
15 16 17 18 19 20 21 22 23
24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34
35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47
48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62
63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79
80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98
99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118
119 120 121 222 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140
141 142 143 144 145 146 147 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160
161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186

Ho trovato il numero, prima scrivendo la piramide fino al numero 186 poi ho aggiunto sempre due numeri in più a quelli che c'erano già fino alla 30' riga.
Il numero è 1145

2. Procedure : Calcul de l'écart (distance entre les derniers nombres = nombre impair + 2)



Abbiamo constatato che l'ultimo numero della trentesima riga è 959.
Considerando che la distanza tra gli ultimi numeri di ogni fila è data da numeri dispari che aumentano di due unità ad ogni colonna, abbiamo sommato per trenta volte gli ultimi numeri di ogni fila per ottenere il risultato pari a 959.

3. Procedure : géométrie des nombres figurés (CA1008)

IL NUMERO DELLA TRENTESIMA RIGA E' 1077.
CI SIAMO ARRIVATI PARTENDO DAL PRESUPPOSTO CHE I NUMERI DELL'ULTIMA RIGA HANNO UNA CERTA SUCESSIONE NELLA LORO DIFFERENZA. INFATTI TRA 2 E 7 C'E' 5 DI DIFFERENZA, FRA 7 E 14 C'E' UN 5 E UN 2 DI DIFFERENZA, FRA 14 E 23 C'E' UN 5 E DUE 2... A TAL PROPOSITO SIAMO ARRIVATI ALLA FORMULA $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ PER RICAVARE QUANTI DUE CI SONO FINO ALLA TRENTESIMA RIGA. OVVIAMENTE DOPO L'ABBIAMO MOLTIPLICATO PER DUE DATO CHE SI TRATTAVA APPUNTO DI 2. DOPODICHE' A QUESTO NUMERO ABBIAMO SOMMATO I CINQUE CHE SONO IN TUTTO 29.
QUINDI $\frac{29 \cdot \cancel{30}^{15}}{\cancel{2}} = 465 \cdot 2 = 930 + (5 \cdot 29) = 1075 + 2 = 1077$

QUESTO DUE E' QUELLO CORRISPONDENTE ALLA PRIMA RIGA CHE NON AVEVAMO ANCORA TENUTO NEL CONTO

La découverte de la formule relative au double de la somme des nombres de 1 à n est déjà une découverte de fonction. L'application est désastreuse à cause de différentes erreurs, soit de calcul, soit d'interprétation de la formule trouvée. Elle devait être, suivant le calcul des élèves : (28 × 29)/2 = 406 × 2 = 812 + (5 × 29) = 812 + 145 = 957 + 2 = 959.

(Cette procédure qu'on peut considérer de type fonctionnel - mais difficile à valider - utilise une formule littérale pour le calcul des écarts successifs de termes de la forme « $5 + n \cdot 2$ ». Une première erreur se rapporte à la valeur de « n » qui devait être 28 et non 29, une deuxième erreur vient du produit de 29 par 15 qui est 435 et non 465.

En effet : (28 × 29) + 5 × 29 + 2 = 959.

On ne relève toutefois pas de procédures fonctionnelles parmi ces classes qui, pour leur grande majorité ont opté pour les procédures B (régularités sur la suite formant le côté droit du trapèze) et E (calcul de la somme des nombres par ligne). Une seule copie utilise la formule $n(n + 1)/2$.

4. Procédure de type récursif basée sur le calcul du nombre de nombres de chaque ligne.

Première découverte : le nombre de nombres augmente (à chaque fois) de deux par rapport à la ligne précédente. Seconde découverte : le nombre final d'une ligne est donné par la somme du nombre de nombres de la ligne avec le nombre final de la ligne précédente.

1ª riga	3
2	5 + 2 = 7
3	7 + 7 = 14
4	9 + 14 = 23
5	11 + 23 = 34
6	13 + 34 = 47
7	15 + 47 = 62
8	17 + 62 = 79
9	19 + 79 = 98
10	21 + 98 = 119
11	23 + 119 = 142
12	25 + 142 = 167
13	27 + 167 = 194
14	29 + 194 = 233
15	31 + 233 = 264
16	33 + 264 = 297
17	35 + 297 = 332
18	37 + 332 = 369
19	39 + 369 = 408
20	41 + 408 = 449
21	43 + 449 = 492
22	45 + 492 = 537
23	47 + 537 = 574
24	49 + 574 = 623
25	51 + 623 = 674
26	53 + 674 = 727
27	55 + 727 = 782
28	57 + 782 = 839
29	59 + 839 = 898
30	61 + 898 = 959

ultimo numero della 30ª riga.

RAGIONAMENTO:

Capendo che il numero delle cifre di ogni riga aumenta di due rispetto alla riga precedente e capendo che la somma del numero delle cifre di ciascuna riga con il numero finale della riga precedente abbiamo ottenuto il numero finale di ogni riga fino ad arrivare al numero finale della trentesima ed ultima riga, ossia 959.