Le retour de Mombo Tapie[1]

Groupe fonction

Mots-clés : suite, carrés, dénombrement, rapport, équation, inéquation

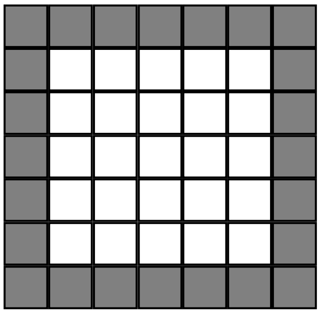
Le problème

Ce problème amène à la comparaison du nombre de carrés unités contenus dans le « bord » d'un grand carré avec le nombre de petits carrés « intérieurs » au grand carré, dans une suite de carrés dont les côtés augmentent de 3 à 20 carrés unités.

Le retour de Mombo Tapie

Mombo Tapie commercialise un nouveau modèle de tapis carrés, constitués de petits carrés de même grandeur : des gris sur le bord et des blancs à l'intérieur.

Voici une représentation d'un tapis de ce modèle, de sept carrés par côté.



Le plus petit tapis a trois carrés par côté. Tous les tapis de ce modèle sont disponibles jusqu'à vingt carrés par côté.

Monsieur Ronay souhaite acheter un modèle avec exactement autant de carrés gris que de carrés blancs.

Madame Gratin souhaite acheter un tapis un peu plus clair, avec plus de deux tiers de carrés blancs, mais cependant moins de trois quarts de carrés blancs.

Est-il possible de satisfaire Madame Gratin ? Et Monsieur Ronay ?

Dans l'affirmative, indiquez le ou les modèles de tapis qui pourraient satisfaire chacun des deux clients.

Expliquez vos réponses.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Imaginer les tapis du modèle donné et en dessiner quelques-uns, parmi les plus simples.

- Comprendre les relations arithmétiques entre le nombre de carrés gris, le nombre de carrés blancs et le nombre de carrés sur un côté du tapis. Par exemple (en langage ordinaire) : le nombre de carrés gris est quatre fois le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins les quatre carrés des angles qui seraient comptés deux fois ; et le nombre de carrés blancs est le nombre de carrés sur le côté du tapis, moins deux, puis élevé au carré.

[1] Problème 16 de l'épreuve I du 19e rallye, de catégories 8,9,10.

- Noter les nombres de carrés de chaque couleur pour quelques tapis, puis se rendre compte qu'il faut en dresser un inventaire systématique (voir exemples suivant).

- Prendre en compte les demandes des clients et, par conséquent, calculer le rapport « carrés blanc / nombre total » pour voir les modèles qui conviennent.

Une analyse des rapports passe par la prise de conscience de leur croissance en fonction du nombre de carrés sur le côté : les tapis deviennent « de plus en plus clairs » car la partie blanche du centre croît plus rapidement que la bordure grise. On peut ainsi aboutir à un inventaire de ce genre, qui se limite aux modèles à envisager :

carrés par côté	carrés gris	carrés blancs	carrés du tapis	blancs/ total
3	8 (= 3 x 4 – 4)	1 = $(3 – 2)^2$	9 = 3^2	1/9 = 0,11…
...	...	...	...	...
6	20 (= 6 x 4) – 4)	16 = $(6 – 2)^2$	36= 6^2	16/36 = **4/9** = **0,44…**
7	24	25	49	**25/49 = 0,51…**
...	...	...	...	...
10	36	64	100	0,64 < 2/3
11	40	81	121	**0,669…**
12	44	100	144	**0,694…**
13	48	121	169	**0,715…**
14	52	144	196	**0,734…**
15	56	169	225	0.751… >3/4
16	60	196	256	0,765..

- Déduire de l'observation de la croissance des rapports « nombre de carrés blancs/nombre total de carrés » que la demande de M. Ronay ne pourra être satisfaite et que Mme Gratin pourra choisir entre les modèles de 11 à 14 carrés de côté.

Résultats

Sur 763 classes ayant participé à la première épreuve du 19e RMT, les points attribués à ce problème sont les suivants :

Points attribués	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*Nb de classes*	*moyen ne*
Catégorie 8	*239*	*121*	*113*	*42*	*23*	*538*	*1,05*
Catégorie 9	*55*	*23*	*33*	*9*	*9*	*129*	*1,18*
Catégorie 10	*38*	*17*	*23*	*9*	*9*	*96*	*1,31*
Ensemble	*332*	*161*	*169*	*60*	*41*	*763*	*1,10*

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse exacte (pas de tapis pour M. Ronay, des tapis de 11, 12, 13 ou 14 carrés par côté pour Mme Gratin) avec explications correctes
3 Réponse exacte pour chaque client avec explications partielles ou peu compréhensibles
2 Réponse exacte pour un client avec explication
ou réponse exacte pour les 2 clients mais sans explications
1 Calculs à propos de quelques tapis seulement
0 Incompréhension du problème.

Procédures, obstacles et erreurs relevés

On a relevé dans les copies les procédures suivantes, de la moins experte à la plus experte :

1) Essais dont l'organisation n'est pas décelable, avec ou sans vérification de toutes les contraintes.

2) Utilisation de dessins, la figure 1 donne un exemple de copie de niveau 8 :

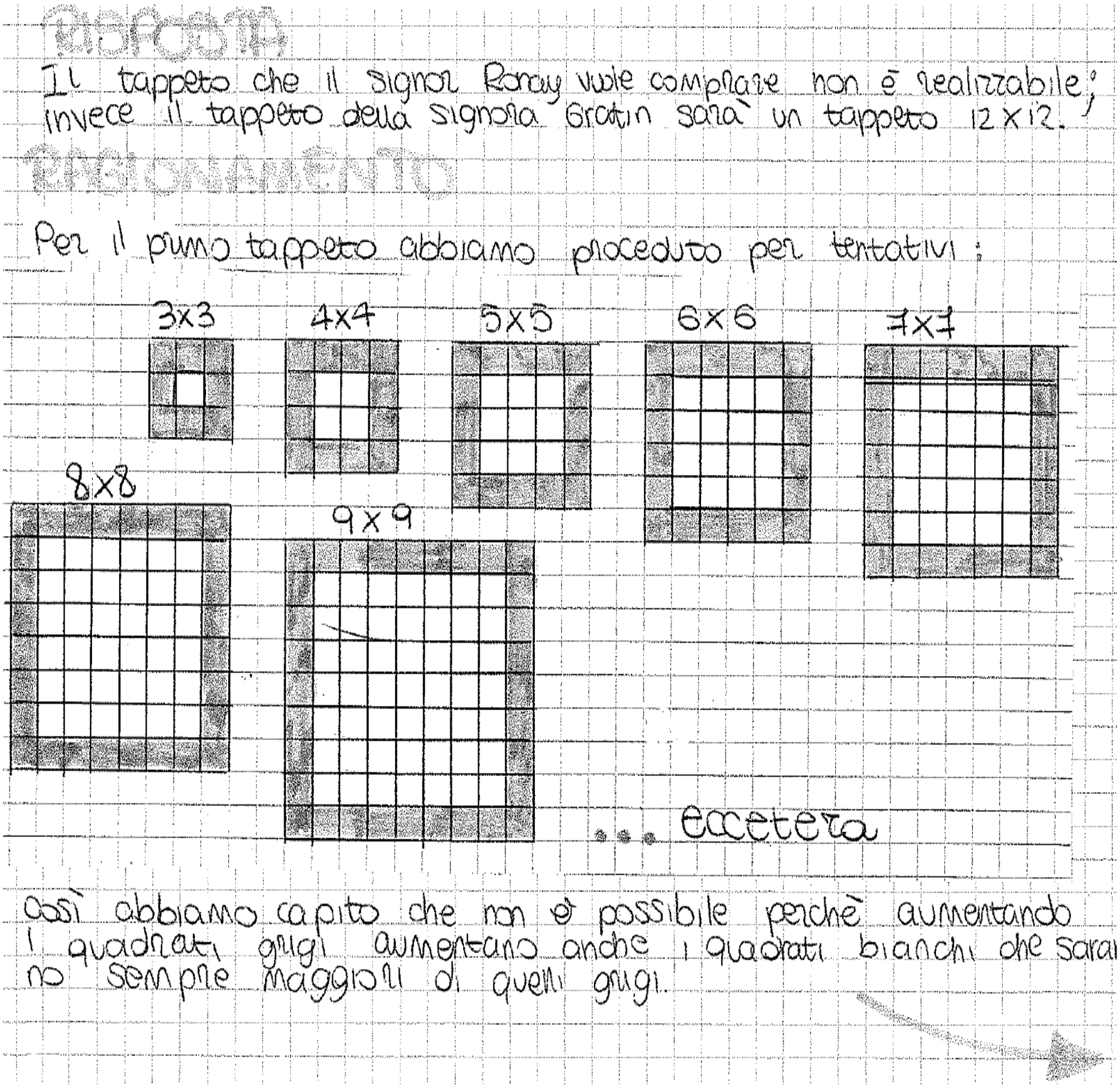


fig 1. Utilisation de dessin (niveau 8)

RÉPONSE
Le tapis que Monsieur Ronay veut acheter n'est pas réalisable ; cependant le tapis de Madame Gratin sera un tapis 12x12.

RAISONNEMENT
Pour le premier tapis, nous avons procédé par essais :
Ainsi nous avons compris qu'il n'est pas possible, parce que en augmentant les carrés gris les carrés blancs augmentent aussi qui seront toujours plus nombreux que les gris

3) Essais explicitement organisés, avec vérification (figure 2)

4) Tableaux complets (de 3 à 20 petits carrés par côté) ou partiels (de 3 à 9, de 3 à 15, ou de 8 à 15 carrés par côté). (figures 3 et 4)

Il signor Ronay non può essere accontentato perché il numero dei quadrati bianchi è sempre diverso da quello dei quadrati grigi:

20 · 4 = 80 - 4 = 76 18 · 18 = 324	14 · 4 = 56 - 4 = 52 12 · 12 = 144	8 · 4 = 32 - 4 = 28 6 · 6 = 36
19 · 4 = 76 - 4 = 72 17 · 17 = 289	13 · 4 = 52 - 4 = 48 11 · 11 = 121	7 · 4 = 28 - 4 = 24 5 · 5 = 25
18 · 4 = 72 - 4 = 68 16 · 16 = 256	12 · 4 = 48 - 4 = 44 10 · 10 = 100	6 · 4 = 24 - 4 = 20 4 · 4 = 16
17 · 4 = 68 - 4 = 64 15 · 15 = 225	11 · 4 = 44 - 4 = 40 9 · 9 = 81	5 · 4 = 20 - 4 = 16 3 · 3 = 9
16 · 4 = 64 - 4 = 60 14 · 14 = 196	10 · 4 = 40 - 4 = 36 8 · 8 = 64	4 · 4 = 16 - 4 = 12 2 · 2 = 4
15 · 4 = 60 - 4 = 56 13 · 13 = 169	9 · 4 = 36 - 4 = 32 7 · 7 = 49	3 · 4 = 12 - 4 = 8 1 · 1 = 1

fig 2. Essais explicitement organisés, avec vérification (niveau 10)

Monsieur Ronay ne peut pas être satisfait parce que le nombre de carrés blanc est toujours différent de celui des carrés gris

côté	aire totale	carrés blancs	carrés noirs	$\frac{2}{3}$ de l'aire totale	$\frac{3}{4}$ de l'aire totale
8	64	36	28	42,6	48
9	81	49	32	54	60,7
10	100	64	36	66,6	75
11	121	81	40	80,6	90,75
12	144	100	44	96	108
13	169	121	48	112,6	126,75
14	196	144	52	130,6	147
15	225	169	56	150	168,75
Solutions		↳ doit être égal à plus que et moins que			

Les solutions pour Madame Gratin soit les tapis de côté de 11, 12, 13 ou 14 carrés.

fig 3. Copie de niveau 9, pour Madame Gratin

- E' possibile accontentare il signor Ronay? No.
Costruendo la seguente tabella, seguendo le caratteristiche richieste dal signor Ronay, ovvero B = N, si nota:

LATO DEL Q.	9	8	7	6	5	4
TOT Q.	81	64	49	36	25	16
QUADR. N.	32	28	24	20	16	12
QUADR. B.	49	36	25	16	9	4

si nota che il totale dei quadrati neri e dei quadrati bianchi aumenta all'aumentare del lato, ma aumenta anche la loro differenza.
Il caso più vicino a B = N è nel quadrato 7x7, poiché i quadrati neri sono 24 e quelli bianchi 25, quindi non è possibile accontentare il signor Ronay.

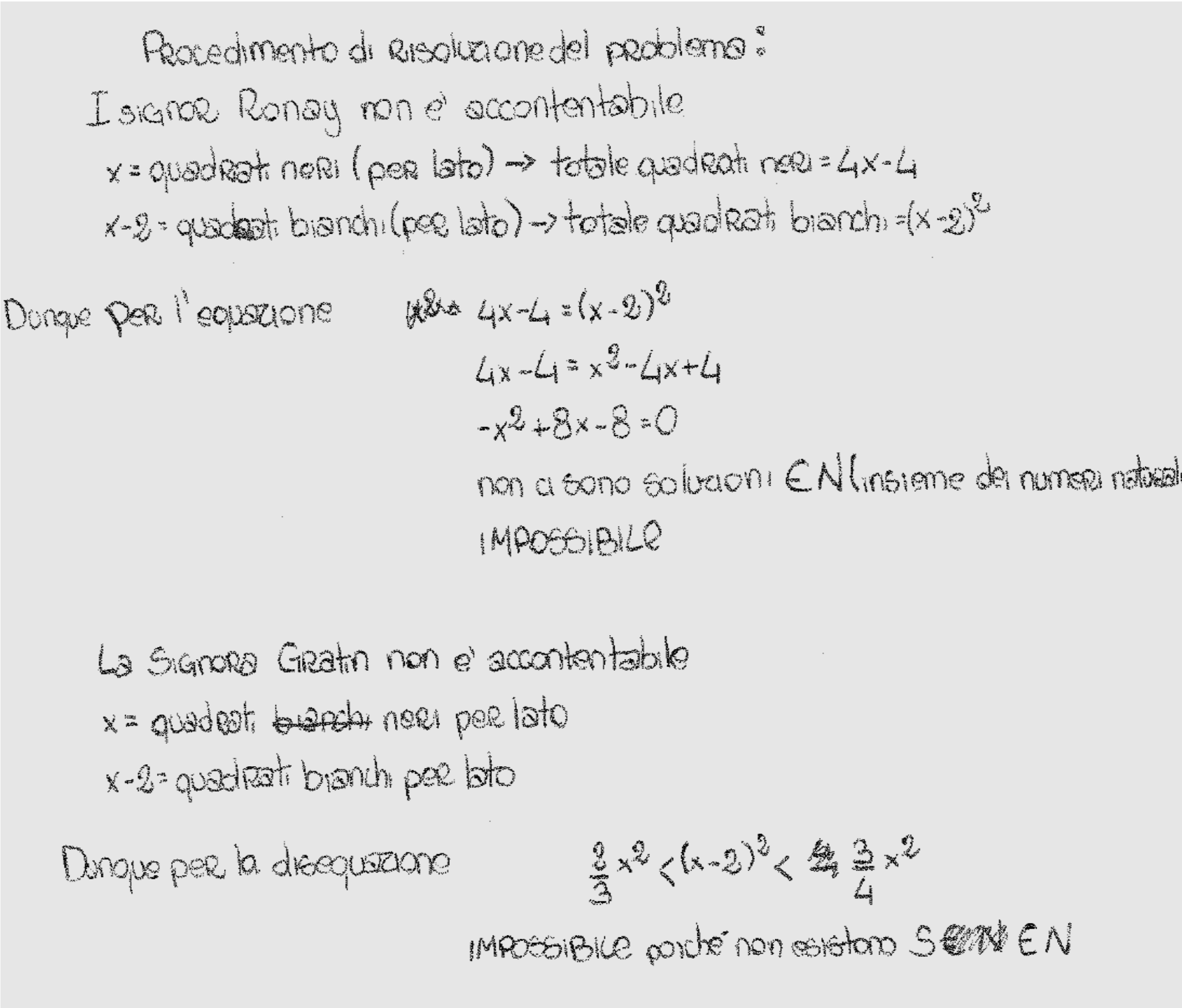
fig 4. Un exemple pour Monsieur Ronay dans une copie de niveau 10

Peut-on satisfaire monsieur Ronay ? Non.
En construisant le tableau suivant, en suivant les contraintes demandées pour Monsieur Ronay, c'est-à-dire B = N, on remarque :

On remarque que le total des carrés noirs et des carrés blancs augmente avec le nombre de carrés du côté, mais augmente aussi leur différence.
La situation la plus proche de B = N est dans le carré 7x7, parce que les carrés noirs sont 24 et les blancs 25, donc il n'est pas possible de satisfaire Monsieur Ronay.

5) Mise en équation et inéquations utilisant la variable n du nombre de petits carrés par côté. La figure 5 montre un exemple de copie de niveau 10, dans laquelle on ne voit pas leur résolution

6) Utilisation de la notion de fonction. Peu de copies utilisent une notation fonctionnelle, exprimant les « nombre de carrés blancs » et « nombre de carrés gris » en fonction du nombre de carrés du côté (figure 6).



Procedimento di risoluzione del problema:

I signor Ronay non e' accontentabile

x = quadrati neri (per lato) → totale quadrati neri $= 4x-4$

$x-2$ = quadrati bianchi (per lato) → totale quadrati bianchi $=(x-2)^2$

Donque per l'equazione $4x-4=(x-2)^2$

$4x-4=x^2-4x+4$

$-x^2+8x-8=0$

non ci sono soluzioni $\in N$ (insieme dei numeri natural

IMPOSSIBILE

La Signora Gratin non e' accontentabile

x = quadrati ~~bianchi~~ neri per lato

$x-2$ = quadrati bianchi per lato

Donque per la disequazione $\frac{2}{3}x^2<(x-2)^2<\frac{3}{4}x^2$

IMPOSSIBILE poiché non esistono S $\in N$

fig 5. Mise en équation (niveau 10)

Procédure de résolution du problème :
Monsieur Ronay ne peut pas être satisfait
x = carrés noirs (par côté)→ total carrés noirs = 4x – 4
x–2 = carrés blancs (par côté) → total carrés blancs = (x–2)²

Donc pour l'équation $4x–4 = (x–2)^2$

$$4x–4 = x^2– 4x + 4$$

$$–x^2 + 8x – 8 = 0$$

Il n'y a pas de solution εN (ensemble des nombres naturels)
IMPOSSIBLE

Madame Gratin ne peut pas être satisfaite
x = carrés noirs par côté
x–2 = carrés blancs par côté

Donc pour l'inéquation

IMPOSSIBLE parce que il n'existe pas S ε N

DIMOSTRAZIONE:

$(x-1)\cdot 4$ = BORDO

$(x-2)^2$ = QUADRATI BIANCHI

Tramite questo formula abbiamo trovato tutti i casi usando $f(x) = (x-1)\cdot 4$ per il bordo, mentre per l'interno $f(x) = (x-2)^2$.
Per queste funzioni risulta che il signor Ronay non può essere accontentato.
Per la signora Gratin possono essere fatti i tappeti con lati 11, 12, 13, 14 perché soddisfano la formula $\frac{2}{3} < \frac{(x-2)^2}{x^2} < \frac{3}{4}$, cioè il rapporto tra i quadrati bianchi e quelli totali del tappeto.

fig 6. Notation fonctionnelle

DÉMONSTRATION
$(x–1).4$ = BORD
$(x–2)^2$ = Carrés blancs

grâce à cette formule nous avons trouvé tous les cas en utilisant $f(x) = (x–1).4$ pour les bords, alors que pour l'intérieur $f(x) = (x–2)^2$.
Avec ces fonctions, il en résulte que Monsieur Ronay ne peut pas être satisfait.
Pour Madame Gratin, on peut faire les tapis avec les côtés 11, 12, 13, 14 parce que qu'ils satisfont la formule ……
C'est-à-dire le rapport entre les carrés blancs et tous les carrés du tapis.

7) Remarques générales

En majorité les productions des élèves montrent une démarche de type empirique, de types 1) ou 2) avec des essais plus ou moins organisés sur des listes et/ou des dessins et arrivent à une compréhension partielle du problème, la méthode empirique privilégiée étant de dessiner divers modèles de tapis. Pour les réponses plus élaborées, l'emploi d'un tableau met en évidence une démarche systématique permettant d'arriver au résultat correct. Dans les catégories supérieures 9 et 10, on peut trouver quelques exemples de la procédure 4) mais, seulement dans de très rares cas, cette démarche algébrique est conduite de manière adéquate et aboutit à une réponse argumentée.

On observe dans la grande majorité des copies que la bonne réponse concernant M. Ronay est donnée sans justification, alors que pour répondre à la demande de Mme Gratin les élèves font ou tentent une vérification a posteriori. Un très petit nombre de copies utilisent implicitement le changement du signe de la différence « nombre de carrés gris moins nombres de carrés blancs » situé entre 6 et 7 petits carrés par côté, pour répondre que M. Ronay ne peut pas être satisfait. De même, très peu remarquent la croissance du rapport du nombre de petits carrés blancs sur le nombre total n^2 de petits carrés.

Même sans tableau ou avec des tableaux ne contenant pas les colonnes représentant les exigences de Mme Gratin, $2n^2/3$ et $3n^2/4$, on trouve des copies calculant de tels rapports pour « vérifier » que Mme Gratin sera satisfaite avec des tapis de côté 11, 12, 13 ou 14 carrés.

Très peu d'élèves ont introduit la variable indépendante n du nombre de carrés par côté pour obtenir les fonctions qui lient les nombres des carrés gris et des carrés blancs au nombre n. D'ailleurs, dans les tableaux contenant les colonnes « nombre de carrés par côté », « nombre de carrés gris », « nombres de carrés blancs », « nombre total de carrés », souvent la colonne de ce qui est le plus logique de choisir comme « variable » (nombre de carrés par côté) n'est pas placée à la gauche du tableau.

Signalons que dans diverses productions les réponses 11 ou 14 pour le tapis de Mme Gratin ont été écartées, parfois un seul résultat (le 12) était donné.

Une dernière observation doit être faite concernant l'énoncé : la demande de Monsieur Ronay y précède celle de Madame Gratin, alors que l'ordre des questions est inversé. Ceci pourrait avoir désorienté certains élèves qui ont fait le choix d'une résolution de type algébrique et n'ayant pas abouti à un résultat pour M. Ronay, abandonnent.

Exploitations didactiques

Étant donné la très faible réussite à ce problème constatée sur 763 copies, il est raisonnable de conseiller de le proposer à des élèves en situation de classe, avec recherche individuelle, mises en commun de « pistes » et, suivant leur niveau, les inciter à construire des tableaux ou à mettre les données en équation.

La construction raisonnée d'un tableau aux niveaux 8 ou 9 peut mettre en évidence le rôle de la variable n du nombre de petits carrés par côté, comme donnée de base pour les calculs des nombres des carrés gris et blancs. Ce travail peut être considéré comme une première approche de la notion de fonction.

On peut adopter une résolution algébrique. Celle-ci conduit à une équation et deux inéquations du second degré, dont le traitement en nombres entiers peut se faire par essais et vérifications ou par une étude classique des trinômes obtenus.

Pour aller plus loin

Une réponse experte peut être de calculer en fonction du nombre n de petits carrés par côté le nombre total de carrés : n^2, le nombres des carrés gris : $4n - 4$ et celui des carrés blancs : $(n - 2)^2$. Pour la demande de Mme Gratin, on peut former le rapport du nombre de carrés blancs sur le nombre total : $(n - 2)^2/ n^2$ et le comparer à 2/3 et 3/4, ce qui conduit aux inéquations du deuxième degré : $8n^2 < 12(n - 2)^2 < 9n^2$ donnant les solutions entières 11, 12, 13, ou 14.

Pour la demande de M. Ronay, on peut résoudre l'équation : nombre de gris = nombre de blancs, $(4n - 4) = (n - 2)^2$ qui n'a pas de solution entière. On obtient donc une impossibilité.

On peut aussi considérer que le rapport $[n / (n - 2)]^2$ devrait être égal à 2, ce qui est impossible car sa racine carrée est irrationnelle.

Bibliographie

Rinaldi, Maria Gabriella (1999). Bordures, *Le Rallye Mathématique Transalpin. Quels profits pour la didactique*? Actes des journées d'études sur le Rallye Mathématique Transalpin, Lucia Grugnetti & François Jaquet eds, Brigues 1997-1998, p. 67-70 /