Le calcul de monsieur Kaprekar[1]

Groupe fonction

Mots-clés : Algorithme, arithmétique, divisibilité par 9, multiple, fonction composée.

Le problème

Un nombre de trois chiffres tous différents étant donné, il s'agit appliquer une procédure de calcul indiquée, constater qu’elle donne toujours le même résultat, le déterminer et justifier son unicité.

Le calcul de monsieur Kaprekar
Le mathématicien M. Kaprekar, est bien connu pour son habileté en calcul. Il aime proposer à chaque nouvel élève le jeu suivant :

« *Pense à un nombre de trois chiffres, tous différents. Écris le nombre le plus grand que tu peux former avec ces trois chiffres, puis écris le nombre le plus petit. Fais la différence des deux. Avec le nombre obtenu, recommence. Fais cette opération cinq fois. En attendant, j’écris sur ce papier le résultat que tu vas trouver* ».

Effectivement, M. Kaprekar prévoit toujours le bon résultat.

Quel est le nombre que M. Kaprekar écrit sur son papier ? Montrez pourquoi on trouve toujours le même nombre.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Comprendre que si M. Kaprekar peut connaître par avance le résultat, c’est que celui-ci est unique, facile à déterminer avec un seul exemple.

- Désigner par K(n) (ou une autre notation) le résultat pour le nombre n du calcul de M. Kaprecar et donner un exemple : K(819) = 981 – 189 = 792.

- Appliquer encore quatre fois ce calcul aux résultats successifs : K(792) = 693 ; K(693) = 594 ; K(594) = 495 ; K(495) = 495 et conclure que le nombre de M. Kaprekar est 495.

- Pour répondre à la deuxième question, après avoir appliqué K sur quelques exemples, remarquer que les résultats successifs ont 9 pour chiffre central, sont divisibles par 9, la somme des chiffres des centaines et des unités valant toujours 9.

- Remarquer que les résultats suivants sont des nombres qui ont un 9 au centre et que les deux autres chiffres sont suivant les cas 1-8 ; 2-7 : 3-6 ; 4-5. Se rendre compte que, selon le calcul de M. Kaprekar, chaque nombre de la forme x9y donne le même résultat que y9x et qu’il suffit donc d'effectuer les calculs pour ces quatre cas.

- Procéder systématiquement en commençant par exemple par 198, trouver 792, puis 693, puis encore 594 et enfin 495. Appliquer cette procédure à 297, à 396 et à 495 et conclure que 495 est le nombre de M. Kaprekar.

Ou bien, en désignant par a le plus grand chiffre du nombre n, par b l’intermédiaire et par c le plus petit, écrire formellement K(n) = $(100a + 10b + c) – (100c + 10b + a) = 99 (a – c)$ et en déduire qu’il est divisible par 99.

[1] Problema 19 della prova II du 20e rallye, de catégorie 10.

- Remarquer que $a - c \geq 2$ (puisqu'il y a b entre eux et que les 3 chiffres sont différents) et qu'il y a seulement 8 multiples possibles de 99 comme valeurs pour K(n).

- Calculer ces 8 multiples (multiplier par 100 et soustraire le facteur) et appliquer à chacun 4 fois successivement la fonction K. Dresser le tableau de calcul suivant en remarquant qu'il n'y a que 8 fois à calculer K :

K(n) : multiples de 99	K(K(n))	$K^{(3)}(n)$	$K^{(4)}(n)$	$K^{(5}(n)$
2 ξ 99 = 198	792	693	594	495
3 ξ 99 = 297	693	594	495	495
4 ξ 99 = 396	594	495	495	495
5 ξ 99 = 495	495	495	495	495
6 ξ 99 = 594	495	495	495	495
7 ξ 99 = 693	594	495	495	495
8 ξ 99 = 792	693	594	495	495
9 ξ 99 = 891	792	693	594	495

Résultats

Sur 78 classes ayant participé à la première épreuve du 19e RMT, les points attribués sont les suivants :

points	0	1	2	3	4	Total	m
Cat. 10	15	29	13	11	10	**78**	1.6
en %	**19%**	**37%**	**17%**	**14%**	**13%**		

Selon les critères déterminés lors de l'analyse a priori :

4 Réponse correcte (495) avec indication claire et précise des régularités, déterminées à partir de deux exemples ou plus et avec explication de la procédure suivie avec le détail des calculs

3 Le nombre 495 avec une explication peu claire,
ou la donnée d'un tableau de calculs sans commentaires

2 Le résultat 495 expliqué par un ou deux exemples traités et l'argument que l'énoncé permet de supposer que le résultat est unique, un seul calcul permet donc de l'obtenir, ou bien 495 obtenu après plus de trois essais et l'argument qu'il y a de fortes chances que ce soit ce nombre que M. Kaprekar a écrit

1 Le résultat 495 sans explication ou avec un ou deux exemples de calcul

0 Incompréhension du problème

Procédures, obstacles et erreurs relevés

Parmi les obstacles que les élèves peuvent rencontrer, on peut signaler la confusion entre chiffre et nombre.

Certains élèves s'arrêtent après la première soustraction, et ne respectent pas la consigne de répéter l'algorithme 5 fois.

D'autres utilisent dans leurs exemples des chiffres égaux.

Les procédures principalement observées consistent à appliquer à différents exemples le calcul de Kaprekar et ensuite à observer des régularités dans les résultats obtenus (copie 2).

On trouve souvent la déduction de la propriété générale à partir seulement de quelques exemples, voire d'un seul (copie 1).

Dans quelques copies, l'analyse est faite en considérant tous les cas possibles ce qui a par conséquent la valeur d'une démonstration.

Dans certaines copies, les élèves s'engagent dans une étude plus théorique du problème, soit en analysant pas à pas les propriétés des soustractions successives (copie 4), soit en utilisant les propriétés de divisibilité intervenant dans ce contexte (copie 3).

Voici quelques observations relevées dans un certain nombre de copies (copie 1) :

- le chiffre central (des dizaines) est 9,
- la somme des chiffres est 18, ou la somme des deux chiffres extrêmes (centaines et unités) est 9,
- à partir de la deuxième soustraction, le chiffre des unités augmente et celui des centaines diminue d'une unité,
- les différences entre un nombre et le suivant sont des multiples de 99,
- à partir de la seconde soustraction, les différences diminuent toujours de 99.

Cette dernière propriété découle aussi d'un calcul explicitant le nombre choisi en base 10, montrant que la première différence et les suivantes sont multiples de 99 (copie 3).

Le nombre d'essais est ainsi limité à partir des 8 multiples de 99 possibles, ainsi que le montre la fin de l'analyse a priori.

La difficulté principale pour les élèves est donc de penser à décomposer les nombres choisis selon les puissances de 10, mettant en évidence les propriétés de la numération décimale de position.

Exploitations didactiques

La copie 1 conclut à partir d'un seul exemple, mais elle en dégage des observations générales qui peuvent conduire au résultat qu'elle donne sans une justification complète

Dans la copie 2, les élèves font plusieurs essais pour vérifier leur première constatation. Ils peuvent alors repérer des régularités dans la suite des différences obtenues, ainsi que les écarts de 99 d'une différence à la suivante à partir de la deuxième, sans remarquer qu'elles sont toutes multiples de 99.

Ils constatent que la suite ainsi décroissante des différences successives se stabilise sur le nombre 495, sans pouvoir généraliser ce résultat à tous les nombres de trois chiffres différents.

Cette copie 2 montre bien plusieurs essais organisés d'où les élèves peuvent dégager des propriétés utiles.

Cependant l'intérêt didactique du problème est de mettre en évidence l'utilité de la décomposition du nombre choisi en base 10. Ce système de numération apparaît alors comme un outil de résolution de ce type de problèmes jouant sur la place des chiffres dans un nombre. Cette autre approche consiste à introduire des variables *a, b, c* pour noter les chiffres du nombre initial. Il peut être représenté sous la forme polynomiale $100a + 10b + c$ ou plus simplement par abc.

Dans le premier cas, il est plus facile de démontrer une des régularités observées, c'est-à-dire que les différences possibles sont toutes multiples de 99 : $(100a + 10b + c) – (100c + 10b + a) = 99 (a – c)$.

Il reste alors à appliquer l'algorithme de Kaprekar aux quatre possibilités différentes que la copie 3 qui suit a mises en évidence. Après quatre nouvelles itérations, le résultat est obtenu.

Cette copie 3 de niveau 10 est représentative de cette approche, sans toutefois aboutir à une justification de la réponse 495 annoncée.

Il numero che Kaprekar scrive sul foglio è 495
Consideriamo in partenza che l'ultima cifra del numero di *
Ogni sottrazione dà come seconda cifra 9. Essa dovrà essere necessariamente l'ultima cifra del numero minore nel passaggio successivo. Sottraendo 9 a qualsiasi numero di almeno due cifre si ottiene un numero minore di una decina e maggiore di un'unità rispetto al precedente. Ripetendo al massimo 5 volte l'operazione l'ultima cifra si incrementa fino a 5 e le altre due di riflesso risultano essere 4 e 9. Una volta trovate queste tre cifre il calcolo diventa ripetitivo

ESEMPIO:

1 987 -	2 981 -	3 972 -	4 963 -	5 954 -
789 =	198 =	279 =	369 =	459 =
198	792	693	594	495

N.B.
È stato anche notato che tutte le cifre diverse da 9 sommate danno 9 per cui poiché una di esse incrementa a ogni passaggio, l'altra diminuisce fino a essere rispettivamente 4 e 5

* partenza è compresa tra 1 e 7 poiché eventuali 8 e 9 dovranno occupare le altre due posizioni per formare il numero maggiore.

Le nombre que Kaprekar a écrit sur la feuille est 495

Nous considérons d'abord que le dernier chiffre du nombre de départ est compris entre 1 et 7 puisque éventuellement 8 et 9 devront occuper les deux autres positions pour former le nombre le plus grand.

Chaque soustraction donne 9 comme deuxième chiffre. Il devra être nécessairement le dernier chiffre du plus petit nombre à l'étape suivante. En soustrayant 9 à un nombre d'au moins deux chiffres on obtient un nombre plus petit d'une dizaine et majoré d'une unité par rapport au précédent. En répétant au plus 5 fois l'opération on obtient finalement un 5 comme dernier chiffre et les deux autres seront 4 et 9. Une fois trouvés ces trois chiffres, le résultat devient répétitif.

EXEMPLE

1 987 –	2 981 –	3 972 –	4 963 –	5 954 –
789	198	279	369	459
198	792	693	594	495

N B
Nous avons aussi noté que les chiffres différents du 9 ont pour somme 9 parce que l'un d'eux augmente à chaque étape et l'autre diminue. Finalement on a respectivement 4 et 5.

Copie 1

Inizialmente abbiamo pensato al numero 471:

471 594 495 495 .....
741 954 954
147 459 459

Quindi abbiamo capito che il numero fisso 495

Abbiamo, in seguito, provato con il numero 691

691 792 693 594 495 495 .....
961 972 963 954 954
169 279 369 459 459

e con il numero 879

~~937~~ 879 198 792 693 594 495 495 .....
987 981 972 963 954 954
789 189 279 369 459 459

Abbiamo notato che si ripetono ~~il~~ numeri 792, 693, 594 e 495

Esistono le seguenti relazioni:

~~839~~

Initialement nous avons pensé au nombre 471

471 594 495 495 …..
741 954 954
147 459 459

Donc nous avons compris que le nombre fixe est 495
*Nous avons ensuite essayé avec le nombr*e 691

691 792 693 594 495 495….
961 972 963 954 954
169 279 369 459 459

Et avec le nombre 879

879 198 792 693 594 495 495 …
987 981 972 963 954 954
789 189 279 369 459 459

Nous avons noté que se répètent les nombres 792, 693, 594 et 495
Avec les relations suivantes

879 198 792 $\xrightarrow{-99}$ 693 $\xrightarrow{-99}$ 594 $\xrightarrow{-99}$ 495
987 981 $\xrightarrow{-9}$ 972 $\xrightarrow{-9}$ 963 $\xrightarrow{-9}$ 954 954
789 189 $\xrightarrow{+90}$ 279 $\xrightarrow{+90}$ 369 $\xrightarrow{+90}$ 459 459

Avec ces relations on trouve toujours le nombre 495
En partant de tout autre nombre de trois chiffres différents entre eux

879 198 792 $\boxed{-99}$ 693 $\boxed{-99}$ 594 $\boxed{-99}$ 495
987 981 $\boxed{-9}$ 972 $\boxed{-9}$ 963 $\boxed{-9}$ 954 954
789 189 $\boxed{+90}$ 279 $\boxed{+90}$ 369 $\boxed{+90}$ 459 459

Con queste relazioni si troverà sempre il numero $\boxed{495}$ partendo dal qualsiasi altro numero di tre cifre diverse tra loro

Copie 2

Il numero che si ottiene è 495

$a > b > c$

$100a + \cancel{10b} + c - 100c - \cancel{10b} - a =$

$= 99a - 99c = 99(a-c)$

$a - c$ è un numero compreso largamente tra 2 a 9

$99 \cdot 2 = 198$
$99 \cdot 3 = 297$
$99 \cdot 4 = 396$
$99 \cdot 5 = 495$
$99 \cdot 6 = 594$
$99 \cdot 7 = 693$
$99 \cdot 8 = 792$
$99 \cdot 9 = 891$

notiamo che delle coppie di numeri hanno le stesse cifre ($99 \cdot 2$ e $99 \cdot 9$; $99 \cdot 3$ e $99 \cdot 8$; $99 \cdot 4$ e $99 \cdot 7$; $99 \cdot 5$ e $99 \cdot 6$)

Copie 3

Le nombre que l'on obtient est 495
a > b > c

100 a + 10 b + c – 100 c – 10 b –a

= 99 a – 99 c = 99 (a – c)

a – c *est un nombre compris au sens large entre* 2 *et* 9
99.2 = 198 *Notons que des*
99.3 = 297 *couples de nombres*
99.4 = 396 *ont les mêmes chiffres*
99.5 = 495 (99.2 et 99ξ9 ; 99.3 et
99.6 = 594 99.8 ; 99.4 et 99.7 ;

99.7 = 693 99.8 = 792 99.9 = 891	99.5 et 99.6)

Sapendo dalla seconda domanda che il risultato è sempre lo stesso eseguiamo il gioco con un numero a caso, e così rispondiamo alla prima domanda. Scegliamo un n° a caso 564

Dovendo di fatto invertire le cifre ad ogni passaggio, le cifre di mezzo sono sempre uguali. Dato che sul fronte delle unità bisogna sempre sottrarre a una cifra piccola una cifra grande, bisognerà effettuare un riporto: impostando la sottrazione in colonna, vediamo che per le cifre di mezzo dobbiamo sempre sottrarre (CIFRA MEDIANA) − 1(ripe

Dato che il minuendo è più basso del sottraendo, bisognerà effettuare un altro riporto dalla colonna delle centinaia e quindi avremo

$\cancel{M} - 1 + 10 - \cancel{M} = -1 + 10 = 9$

la CIFRA MEDIANA è sempre 9

A M B
B M A
—
9

A = più alta
M = med.
B = più bassa

La cifra 9 è la più alta, quindi il secondo passaggio sarà:

9 ? b −
? 9 ? =

si effettuerà un riporto per le unità, quindi su tale colonna avremo: $b + 10 - 9 = b + 1$ che è l'unità del risultato. Per spiegazione precedente la cifra "di mezzo" è 9

Dato che la terza cifra aumenta sempre di 1, e considerando il riporto la prima cifra del minuendo è sempre 8 (9 − il riporto)

Otteniamo che 8 − una cifra sempre crescente dà una cifra sempre decrescente.

Quindi crescendo sempre le unità e diminuendo sempre le centinaia si raggiungeranno le cifre 5 e 4, mediane della scala delle cifre

Avremo quindi sempre le cifre 5, 4, 9 che ordinate danno

954 −
459
—
495 che è sempre il risultato. Poichè 5 è la 5ª cifra, tale risultato si ottiene al massimo al 5ª passaggio.

654 −
456 =
—
198 ① passaggio

981 −
189 =
—
792 ②

972 −
279 =
—
693 ③

963 −
369 =
—
594 ④

954 −
459
—
495 ⑤

Copie 4 (niveau 10)

D'après la seconde affirmation, le résultat est toujours le même quand on exécute le calcul avec un nombre comme c'est demandé à la première question. Nous avons choisi le nombre 564.

654 –	*981 —*	*972 –*	*963 –*	*954 –*
456 ①	*189* ②	*279* ③	*364* ④	*459* ⑤
198	*792*	*693*	*594*	*495*

Comme on intervertit les chiffres à chaque étape, les chiffres du milieu seront toujours égaux. Vu que pour les unités on doit toujours soustraire un grand chiffre d'un petit chiffre, il faudra faire une retenue. En posant la soustraction en colonnes, on voit que pour les chiffres du milieu il faut toujours *soustraire (CHIFFRE DU MILIEU) – 1 (retenue). Étant donné que cette différence est plus petite, il faut effectuer une autre retenue dans la colonne des centaines.*

On a donc

N-1+10-N = –1+10 = 9

ANB		*A = le plus grand*
– BNA		*N = milieu*
9		*B = le plus petit*

Le CHIFFRE DU MILIEU est toujours 9.

Le chiffre 9 est le plus grand, à la seconde étape, on obtiendra :
9 a b
b a 9
on effectue une retenue pour l'unité, donc sur cette colonne on a : b + 10 – 9 = b + 1 qui est l'unité du résultat. D'après l'explication précédente le chiffre « du milieu » est 9.

Vu que le troisième chiffre diminue toujours de 1, et considérant la retenue, le premier chiffre dans la différence est toujours 8 (9 – la retenue), on obtient que 8 – un chiffre toujours croissant donne un chiffre toujours décroissant.
Donc, les unités sont toujours croissantes et les centaines toujours décroissantes, on atteint les chiffres 5 et 4, médians dans la suite des chiffres.
Nous aurons donc toujours les chiffres 5, 4, 9, qui ordonnés donnent
9 5 4 –
4 5 9
4 9 5 qui est toujours le résultat. Puisque 5 est le 5ème chiffre, ce résultat est obtenu au plus à la 5ème étape.

Dans le second cas, en écrivant en colonne la soustraction (*abc*) – (*cba*), comme *c* est plus petit que *a*, par emprunt d'une dizaine, on voit que dans la différence, le chiffre des dizaines est 9. Puis, la soustraction suivante devient (9de) – (*ed*9) et à nouveau on peut conclure que le chiffre des unités augmente de 1 et celui des centaines diminue de 1. Cette analyse approfondie de l'algorithme de la soustraction conduit finalement au résultat que le nombre de Kaprekar est 495. C'est la démarche décrite dans la copie 4 de niveau 10.
L'algorithme de Kaprekar peut être généralisé à des nombres plus grands, l'unicité n'étant pas systématique (voir cette étude sur Wikipédia).

Bibliographie

L'encyclopédie en ligne Wikipédia donne accès à de nombreuses études sur le sujet : http://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Kaprekar

Dattatreya Ramachandra Kaprekar (1905 - 1988) est un mathématicien indien connu pour ses recherches sur les nombres. On lui doit la notion de nombre de Kaprekar ainsi que l'algorithme de Kaprekar. Boudé par ses contemporains, ses travaux seraient passés inaperçus s'il n'avaient pas été relayés par Martin Gardner, spécialiste des énigmes mathématiques (Wikipedia).
