Nombres magiques[1]

Groupe fonction

Mots-clés : Numération décimale, énigme, séquence, algorithme, opérations, déduction, équation.

Le problème

Il s'agit d'eExpliquer le fonctionnement d'un jeu : à partir d'un nombre quelconque de deux chiffres pensé par un joueur, appliquer une suite d'opérations, puis, du résultat obtenu, retrancher l'année de naissance du joueur pour obtenir un nombre de quatre chiffres dont les deux premiers forment le nombre pensé et les deux derniers l'âge du joueur.

Antoine propose ce jeu à sa sœur Zoé :

« *Pense à un nombre de deux chiffres. Multiplie ce nombre par 4. Au résultat, ajoute 68. Multiplie le total par 25.*

À ce résultat, ajoute le nombre entier formé par les trois premiers chiffres du nombre pi (π).

Puis retranche ton année de naissance. Tu trouves un nombre de 4 chiffres.

Les deux premiers donnent le nombre que tu as choisi et les deux derniers donnent ton âge en 2014 ».

Zoé suit les indications et vérifie qu'Antoine a raison.

Expliquez pourquoi ce calcul tombe toujours juste.

Tâche de résolution et savoirs mobilisés

- Faire quelques essais pour vérifier que le jeu fonctionne pour n'importe quel nombre et avec n'importe quelle personne qui joue.

- Comprendre que le nombre choisi par Zoé est d'abord multiplié par 4 puis par 25, il est donc multiplié par 100 et devient un nombre de centaines.

- Comprendre que par distributivité de la multiplication sur l'addition on ajoute 68 multiplié par 25, soit 1700.

- En continuant l'algorithme, Zoé ajoute 314 à 1700, ce qui donne 2014.

- De 2014, Zoé retranche son année de naissance, ce qui donne son âge en 2014 (nombre de 2 chiffres, éventuellement commençant par 0 !).

- Le résultat du calcul de Zoé est un nombre à 4 chiffres dont les deux premiers chiffres donnent un nombre de centaines égal au nombre choisi et les deux derniers chiffres, les dizaines et les unités donnent son âge en 2014.

Ou bien : Écrire le nombre de deux chiffres en forme polynomiale $10x + y$ et le transformer selon les indications données :

$4\,(10x + y)$; $40x + 4y + 68$; $25\,(40x + 4y + 68) = 1000\,x + 100\,y + 1700$;

$1000\,x + 100\,y + 1700 + 314 = 100\,(10x + y) + 2014$.

[1] Problème 17 de l'épreuve II du 22e rallye, de catégories 8,9,10.

On observe ainsi qu'on obtient un nombre de quatre chiffres dont les deux premiers forment le nombre choisi et la différence entre 2014, l'année actuelle, et l'année de naissance est l'âge de la personne qui joue.

Résultats

Points obtenus : sur 841 classes de 19 sections

points	Occ 0	Occ 1	Occ 2	Occ 3	Occ 4	Total	m
Cat. 8	237	171	62	54	60	584	**1.2**
Cat. 9	55	39	16	19	15	144	**1.3**
Cat. 10	25	26	7	11	44	113	**2.2**
tot	**317**	**236**	**85**	**84**	**119**	**841**	**1.3**

en %

Cat. 8	41%	29%	11%	9%	10%
Cat. 9	38%	27%	11%	13%	10%
Cat. 10	22%	23%	6%	10%	39%
tot	38%	28%	10%	10%	14%

Selon les critères d'attribution des points suivants :

4 Une explication complète et claire montrant la compréhension de la distributivité et le calcul de l'âge

3 Une explication peu claire ou incomplète, mais qui met en évidence le calcul de l'âge de Zoé

2 Une explication très incomplète, qui montre le calcul des centaines à partir du nombre choisi

1 Début de recherche avec plusieurs exemples et un début d'explication

0 Incompréhension du problème

Procédures, obstacles et erreurs relevées

a) Incompréhension du problème

- C'est le cas de plus du tiers des copies au niveau 8.
- Un effet type âge du capitaine :

Il y a une proportionnalité. ((("X" x 4)+68) x 25)+314)-2000

Dans celle-ci, on peut lire un autre bel effet de contrat didactique :

Le calcul tombe toujours juste à chaque fois car la formule a été créée pour que le nombre soit celui qui a été voulu, et comme la formule reste toujours la même, les résultats seront ceux qui seront attendus. (

b) Calculs sur des exemples

- 1, 2 ou 3 exemples pour montrer que le résultat du calcul est bien conforme à ce qui est annoncé. C'est le cas de 39 copies de niveau 8 sur 139 analysées en Franche-Comté.

- Un seul exemple dans ces copies de niveau 8, l’algorithme est bien maîtrisé, mais il n’y a pas d’explication justifiant la généralité de la procédure :

$$26 \xrightarrow{\times 4} 104 \xrightarrow{+68} 172 \xrightarrow{\times 25} 4300 \xrightarrow{+314} 4614 \xrightarrow{-2000} 2614$$

- Une affirmation invérifiable :

30 x 4 = 120
120 + 68 = 188
188 x 25 = 4700
4700 + 314 = 5014
5014 - 2000 = 3014

c'est toujours vrai car il n'y a pas de contre-exemple.

- Un exemple bien détaillé sans explication :

Nous avons choisi le chiffre 11. Nous le multiplions par 4 : 11X4=44.
Nous ajoutons 68 au résultat : 44+68 = 112.
Nous multiplions le résultat par 25 : 112X25 = 2800.
π = $\boxed{3,14}$1592654. → on prend 3.14. Donc on fait : 2800+314=3114.
Notre année de naissance est l'année 2000. Donc on soustrait le résultat par 2000. ⇒ 3114 - 2000 = 1114.
Et les 2 premiers chiffres sont : 11, c'est bien notre nombre de départ que nous avons choisi. Et les 2 derniers chiffres sont : 14, c'est bien notre âge. Antoine a bien raison.

c) Généralité du résultat

Dans cette copie, de niveau 8, la généralité est longuement décrite à partir d’un exemple :

$$10 \xrightarrow{\times 4} 40 \xrightarrow{+68} 108 \xrightarrow{\times 25} 2700 \xrightarrow{+314} 3014 \xrightarrow{-2000} 1014$$

Abbiamo preso un numero a caso : il 10.
Eseguendo i vari passaggi indicati dal problema siamo arrivati al risultato Finale di 1014. Infatti 10 é il numero con cui eravamo partiti e 14 é l' effettiva etá che noi abbiamo (siamo nati nel 2000) nel 2014.

Nous avons pensé à un nombre : le 10.
En exécutant les divers opérations indiquées par le problème nous sommes arrivés au résultat final 1014. En fait 10 est le nombre duquel nous étions partis et 14 est l'âge que nous avons (nous sommes nés en 2000) en 2014.

Abbiamo notato che le
ultime 2 cifre del 314
corrispondono all' anno nella
quale noi dobbiamo avere
l'etá indicata dalle ultime
due cifre del numero Finale
cioé 1014 → 14.
Quindi il gioco Funziona semp
perché le 2 cifre Finali di 314
corrispondono all anno che il problema ci ha Fornito, 2014.

Nous avons noté que les deux derniers chiffres de 314 correspondent à l'année pour laquelle nous devons avoir l'âge indiqué par les deux derniers chiffres du nombre final obtenu. 1014 2> 14.
Le jeu fonctionne donc parce que les 2 derniers chiffres de 314 correspondent à l'année que le problème nous a donnée, 2014.
Deux exemples sont traités dans cette copie de niveau 8, avec un raisonnement par parité :

Sostituendo 314 con 315 e usando sempre 10 come
numero iniziale, il risultato é 1015 che é ~~l'etá~~ l'a
~~che~~ in qui noi avremo 15 anni, che corrisponde alle ultime
due ciFre del 315.
In conclusione il gioco Funziona perché le ultime due
ciFre di 314 ti indicano in quale anno avrai l'etá
indicata dalle ultime due ciFre del risultato!

En substituant 314 à 315 et en employant toujours 10 comme nombre initial, le résultat est 1015, et dans ce cas nous avons 15 ans, qui correspondent aux derniers deux chiffres de 315. En conclusion le jeu fonctionne parce que les deux derniers chiffres de 314 t'indiquent en quelle année tu auras l'âge indiqué par les deux derniers chiffres du résultat !

(1ª tappa) ogni numero moltiplicato per 4 da un numero pari
11·4=44 => pari 10·4=40 => pari

(2ª tappa) Ogni numero pari, addizionato a un numero pari, da un numero pari
44+68=112 40+68=108

(3ª tappa) Ogni numero pari, moltiplicato per 25, da un numero in cui le ultim
due cifre sono due 0
108·25=2700 112·25=3800

(4ª tappa) Aggiungendo il numero 314 le ultime due cifre sono 1 e 4
2700+314=3014 2800+314=3114

(1e étape) Tout nombre multiplié par 4 donne un nombre pair

(2e étape) Un nombre pair ajouté à un nombre pair donne un nombre pair

(3e étape) Un nombre pair multiplié par 25 donne un nombre dans lequel les deux derniers chiffres sont deux 0

(4e étape) En ajoutant le nombre 314, les deux dernier chiffres sont 1 et 4

d) Remarques sur le facteur 100

- Les exemples montrent la multiplication par 100 du nombre pensé (niveau 8) :

— Quand on choisit un nombre de deux chiffres, qu'on le multiplie par 4 puis qu'on ajoute 68 puis qu'on multiplie le total par 25 on se rend compte que ce nombre est plus grand que 1000 et que le chiffre des unités et des dizaines est 0 donc quand on rajoute 314 (les 3 premiers chiffres du nombre π) puis qu'on enlève l'année de naissance **on trouve le** nombre qu'on a choisi plus les deux derniers qui donnent notre âge en 2014.

- Même avec un âge canonique pour des élèves :

- Le chiffre de départ s'est décalé de deux crans, on la donc multiplié par 100.
Voila pourquoi le chiffre de base s'est retrouvé au début du nombre finale.
Avant l'ajout de 314 le nombre se termine par deux zéros.
Grâce au deux zéros du 100, si on addition 314 les deux derniers chiffres apparaîtrons dans le résultat. Donc si on enlève notre année de naissance on trouvera notre âge car le 14 de 314 est sinificatif de l'année 2014, mais notre année de naissance (1952) on trouvera notre âge.

$$\begin{array}{r} 4414 \\ -\ 1952 \\ \hline =\ 2462 \end{array} \rightarrow 62 \text{ âge}$$

24 chiffre de départ.

- Compréhension de la multiplication par 100 du nombre donné, ce qui explique qu'on le retrouve comme centaines du résultat du calcul, dans cette copie de niveau 9 où il y a un choix de variables :

Il gioco funziona sempre perché

$25 \cdot 4 = 100 \qquad n \cdot 100 = n \cdot 10^2$

$+68 \times 25 + 314 = 2014$

$2014 - n^1 = n^2$

Le jeu fonctionne toujours parce que

IL NUMERO CHE HAI PENSATO
n^1 = ANNO DI NASCITA
n^2 = LA TUA ETÁ NEL 2014

n = nombre que nous avons pensé
n^1 = année de naissance
n^2 = âge en 2014

- Idem, mais avec des explications détaillées dans cette copie de niveau 8 :

Dopo varie prove, abbiamo verificato che le operazioni risultano corrette se il numero pensato, che identifichiamo con "X", e il numero dell'anno di nascita, che rappresentiamo con "Y", sono interi ≥ a zero. L'operazione da svolgere è quindi:
X · 100 + 2114 − Y
L'età risulta perché 2114, cioè uno dei due elementi invariabili della somma algebrica, termina con "14", come l'anno in cui si avrà quell'età.
Il numero pensato risulta corretto perché, dato che viene moltiplicato per 100, le unità e le decine sono due "0 (zero)" e ~~il numero~~ le unità del numero pensato vanno al posto delle centinaia del numero finale, le decine del primo numero vanno alle migliaia, e così via.

Dans ce problème, nous avons vérifié que les opérations donnent un résultat correct pour le nombre pensé, que nous avons noté ''X'', et l'année de naissance que nous avons représentée par ''Y'', qui sont des entiers ≥ à zéro. L'opération proposée est donc : X.100 + 2114 – Y

Ce résultat parce que 2114, est un des deux éléments invariables de la somme algébrique, se terminant par ''14'', comme l'année dans laquelle on a cet âge.
Le nombre pensé obtenu est correct parce qu'il est multiplié par 100, les unités et les dizaines sont deux ''0 (zéro)'' et les unités du nombre pensé font partie du nombre final, les dizaines du premier nombre forment les milliers, etc.

e) Une variable (le nombre pensé) ou deux variables (l'année de naissance des élèves).

- Le problème est alors intermédiaire entre une expression algébrique et des essais numériques, ce qui en général conduit au résultat (niveau 8) :

IL GIOCO FUNZIONA POICHE' E' UN' IDENTITA'.
~~Ciò Perciò Significa che può ess~~
Perciò può essere risolta per qualsiasi valore attribuito all' incognita.

L'IDENTITA' E': $(4x + 68)\cdot 25 + 314 - y = x \cdot 100 + (2014 - y)$
x = NUMERO DI DUE CIFRE CHE HAI PENSATO
y = IL TUO anno di nascita → ESEMPIO :

$x = 28$ $y = 2000$

$(4 \cdot 28 + 68)\cdot 25 + 314 - 2000 = 28 \cdot 100 + (2014 - 2000) =$
$2814 = 2814$

Le jeu fonctionne puisque c'est une identité
Donc peut être résolu pour n'importe quelle valeur donnée à l'inconnue
x = nombre à deux chiffres que nous avons pensé
y = l'année de naissance 2> exemple :

- Une bonne compréhension du problème (niveau 8) :

100x va nous donner les 2 premiers chiffres du nombre et quelque soit ce nombre choisit comme il est multiplier par 100 on lui rajoute juste les deux zeros. Les 2 zéros sont remplacé par notre âge. Comme ça on a notre chiffre de départ + notre âge a chaque fois.

- Une formule à deux variables (avec plus ou moins de succès) dans cette copie de niveau 10 :

X = numero che ho pensato
Y = anno di nascita

$(4X + 68)\cdot 25 + 314 - Y =$
$= 100X + 1700 + 314 - Y =$
$= 100X + 2014 - Y$

- 100X intende il numero che ho pensato per 100, (la X) mantiene quindi nel numero finale a 4 cifre le prime due posizioni
- 2014 e' sempre fisso perche' e' il risultato dei numeri forniti da Antonio (1700+314)
- Sottraendo il nostro anno di nascita (Y) a 2014 (che e' fisso), si ottiene sempre la nostra eta' nel 2014

x = nombre que nous avons pensé
y = année de naissance

. 100 x est le nombre que j'ai pensé par 100, le x occupe donc dans le nombre à 4 chiffres les deux premières positions
. 2014 est toujours fixé parce qu'il est le résultat des nombres donnés (1700+314)
. En soustrayant notre année y de naissance à 1014 (qui est fixé), on obtient toujours notre âge en 2014

f) Imprécisions sur l'âge et sur les données

- Un obstacle rencontré est de trop sensibiliser les élèves sur leur âge. De ce fait, ils ont tendance à considérer en priorité leur âge réel sans chercher à comprendre le calcul, comme par exemple dans cette copie de niveau 8 :

– Il y a des exeptions : Contre exemple : Nous sommes le 10 avril, Léa est née le 9 octobre 2000 . Léa choisi le chiffre 12 :
[(12×4 +68)×25 +314] - 2000 = 1214
Léa a choisi le 12, on le retrouve mais Léa n'a pas encore 14 ans même si nous sommes en 2014, car nous n'avons pas passé le 9 octobre .

- Une incompréhension de l'énoncé est de prendre le nombre Pi (3,14) au lieu de 314.

17×4 +68 ×25+3,14 = 1771,14.
10×4+68×25+3,14 = 1743,14
Le calcul tombe toujours juste temps que l'on prend un nombre entre 10 et 20.

g) Un traitement exhaustif par tableur

10	40	108	2700	3014	**1014**
11	44	112	2800	3114	**1114**
12	48	116	2900	3214	**1214**

96	384	452	11300	11614	**9614**
97	388	456	11400	11714	**9714**
98	392	460	11500	11814	**9814**
99	396	464	11600	11914	**9914**

Zoé suit les indications et vérifie qu'Antoine a raison.
Explique, pourquoi ce calcul tombe toujours juste. (fait par tableur)

La formule est :

$A \times 4 = B$

$B + 68 = C$

$C \times 25 = D$ F est le résultat final

$D + 314 = E$

$F - 2000 = F$

Exploitations didactiques

C’est un problème classique : trouver un nombre après un algorithme de calcul dont la décomposition permet de trouver la clé donnant un résultat à partir duquel on peut reconstituer les données. Dans ce problème, on trouve un jeu exploitant l’écriture décimale d’un nombre. On y sépare les centaines des dizaines et unités, chaque partie rétablit les nombres donnés. L’intérêt didactique est de faire apparaître la décomposition décimale comme un outil essentiel pour comprendre le succès de l’algorithme proposé.

Celui-ci fait intervenir une multiplication par 4, suivie après addition d’une multiplication par 25. La distributivité de la multiplication sur l’addition donne une multiplication par 100 du nombre pensé. La compréhension de cette propriété conduit à l’explication demandée. Sans elle, la répétition d’exemples est présentée comme argument justificatif de la validité de l’affirmation d’Antoine. Suivant le niveau auquel ce problème est proposé, cet argument peut être retenu ou rejeté.
