Un mazzo di fiori[1]

Grupo funzione

Parole chiave : Funzione, trinomio di secondo grado, equazione di secondo grado, radice quadrata, messa in equazione

Il problema

Questo problema propone trovare il numero n tale che $2n(n-1) = 2244$ in un contesto di raccolta tra allievi, che presuppone conversioni di euro in centesimi. Equazioni di secondo grado .

> **Un mazzo di fiori**
> Sandra è rappresentante di classe. Gli studenti apprezzano molto la loro professoressa di matematica e decidono di regalarle un mazzo di fiori per le feste di Natale.
>
> Ogni allievo ha versato tante volte 2 centesimi di euro quanti sono gli allievi della classe.
>
> Sandra ha raccolto le quote e conta la cifra ottenuta. Senza considerare la sua quota, ha 22 euro e 44 centesimi.
>
> **Quanti allievi ci sono nella classe?**
>
> **Spiegate come avete trovato la risposta.**

Compito da risolvere e saperi mobilizzati

- Prima di tutto, interpretare correttamente l'enunciato. Si è verificato che è la difficoltà di lettura dell'enunciato che ha impedito a molti allievi di impostare i calcoli correttamente.

- Calcolare la quota che sarà ottenuta per differenti effettivi n di allievi per il prodotto di quello che ciascuno dà ($2n$) moltiplicato per il numero di allievi (n-1), fino a trovare, per tentativi successivi, 2244 centesimi. Si trova così $n = 34$.

O, interpretare l'enunciato sotto forma algebrica: se n è il numero di allievi nella classe,, Sandra ha ricevuto $2n\ (n-1)$ centesimi di euro. L'equazione $2n\ (n-1) = 2244$, con n intero, ha come soluzione 34.

Per risolvere questa equazione, si può procedere per tentativi successivi, sapendo che n è un numero intero, a partire da $n(n-1) = 1122$.

Si può (in cat 10 ?), utilizzare la formula risolutiva generale delle equazioni di secondo grado dopo aver semplificato per 2: $n\ (n-1) = 1122$ o $n^2 - n - 1122 = 0 \Rightarrow n = 1 + (\sqrt{1 + 4488}/2)$ (l'altra radice non è accettabile perché è negativa).

Senza ricirrere alla formula generale si può ancora notare che $2(n-1)^2 < 2\ n(n-1) < 2n^2$. Utilizzando le radici quadrato si ha dunque: $n - 1 < \sqrt{1122} < n$. Poiché $\sqrt{1122} \approx 33{,}5$, si ha $n = 34$.

Resultati

Su 1181 classi che hanno partecipato alla I prova del 17° RMT, di 21 sezioni :

[1] Problème 15 de l'épreuve I du 17e rallye, de catégories 7 à 10.

Punti attribuiti	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*N classi*	*m*
Categoria 7	334	49	54	55	40	532	0,91
Categoria 8	182	46	46	62	68	404	1,48
Categoria 9	51	15	30	20	21	137	1,60
Categoria 10	29	7	24	17	31	108	2,13
Totale	50	10	13	13	14	1181	1,29

Secondo i criteri dell'analisi a priori del problema:

4 Risposta corretta (34 allievi) con ricerca ragionata
3 Risposta corretta ottenuta con tentativi non organizzati
2 Risposta corretta senza spiegazione
1 Risposta errata, ma inizio di ragionamento corretto
0 Assenza di risposta

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Non ci sono «ostacoli» nel senso della didattica, ma la lettura difficile e cattiva comprensione dell'enunciato.

La relativa complessità dell'enunciato non ha permesso a certi allievi di appropriarsi della situazione, quindi di risolvere il problema.

Constatiamo che questo problema non è stato trattato all'interno di un ambito algebrico. In categoria 7 e 8 non c'è da meravigliarsi, è, invece, strano in cat 9 dove gli allievi studiano le funzioni ed imparano a «mettere in equazione» problemi in contesti diversi. E la stessa cosa in cat 10, appena più di un quarto degli allievi scrive l'equazione corretta.

Procedure ed errori che si sono potuti identificare:

Categoria	Procedure	Errori
7 e 8	- per tentativi - utilizzo di un'incognita - scrittura di un'equazione - ricerca dei divisori di 2244	Capiscono che ogni allievo dà 2 centesimi Trovano 22, 33, 17 o 11
9	- per tentativi - utilizzo di un'incognita - scrittura di un'equazione	Capiscono che ogni allievo dà 2 centesimi
10	- per tentativi - utilizzo di un'incognita - scrittura di un'equazione - calcolo della radice quadrata di 1122	Capiscono che ogni allievo dà 2 centesimi

In cat 7 e 8, sono stati analizzati 249 elaborati:

- il 7 % utilizza un'«incognita» (*n* il numero di allievi) senza esplicitare ciò che rappresenta, ma soltanto il 2 % scrive un'equazione esatta;

- il 31 % procede per tentativi (il più delle volte non organizzati) per trovare il risultato corretto, di questa percentuale i due terzi non fanno altro che «verificare» che 34 è il numero degli allievi;

- il 16 % non scrive niente;

- il 9 % risolvono esplicitamente come se ogni allievo desse 2 centesimi;
- molti trovano 22, 33, 17 o 11 cercando i divisori di 2244.

In cat 9, sono stati analizzati 88 elaborati:

- il 15 % utilizza un'incognita ma soltanto il 9% scrive un'equazione esatta e nessuno risolve l'equazione;
- il 45 % procede per tentativi (di cui non si vedono spesso le tracce) per trovare il risultato corretto;
- il 25 % non scrive niente o cose incomprensibili;
- nessuno mostra il calcolo della radice quadrata di 1122;
- il 8% ha capito che ogni allievo dà 2 centesimi.

In categoria 10, sono stati analizzati 71 elaborati:

- il 44 % utilizza un'incognita, di questa percentuale il 29 % scrive l'equazione corretta, e il 18 % la sa risolvere;
- il 38 % procede per tentativi;
- il 10 % calcola la radice quadrata di 1122;
- il 5 % non scrive niente e il 5 % ha capito che ogni allievo dà 2 centesimi.

La non riuscita è dovuta, in parte, soprattutto in cat 7 e 8, ad una incomprensione o una cattiva interpretazione dell'enunciato («tante volte 2 centesimi quanti …»).

Indicazioni didattiche

Nell'ambito di una sperimentazione fuori del rally in 8 classi, una di cat 8, cinque di cat 9 e due di cat 10, questo problema è stato proposto con una domanda supplementare, il cui obiettivo era quello di incitare gli allievi a porsi in ambito algebrico:

«Scrivete i calcoli da fare per trovare il numero di allievi della classe».

Ma anche in questo caso, solo in 1 copia di categoria 9 e in 3 di categoria 10 scrivono delle equazioni (sbagliate in ragione di una cattiva interpretazione dell'enunciato!), come in questa della figura 1

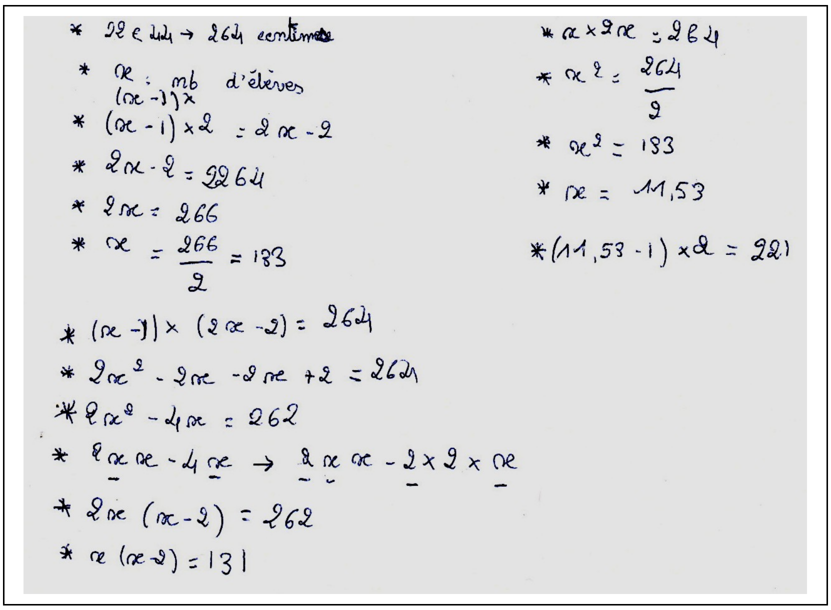
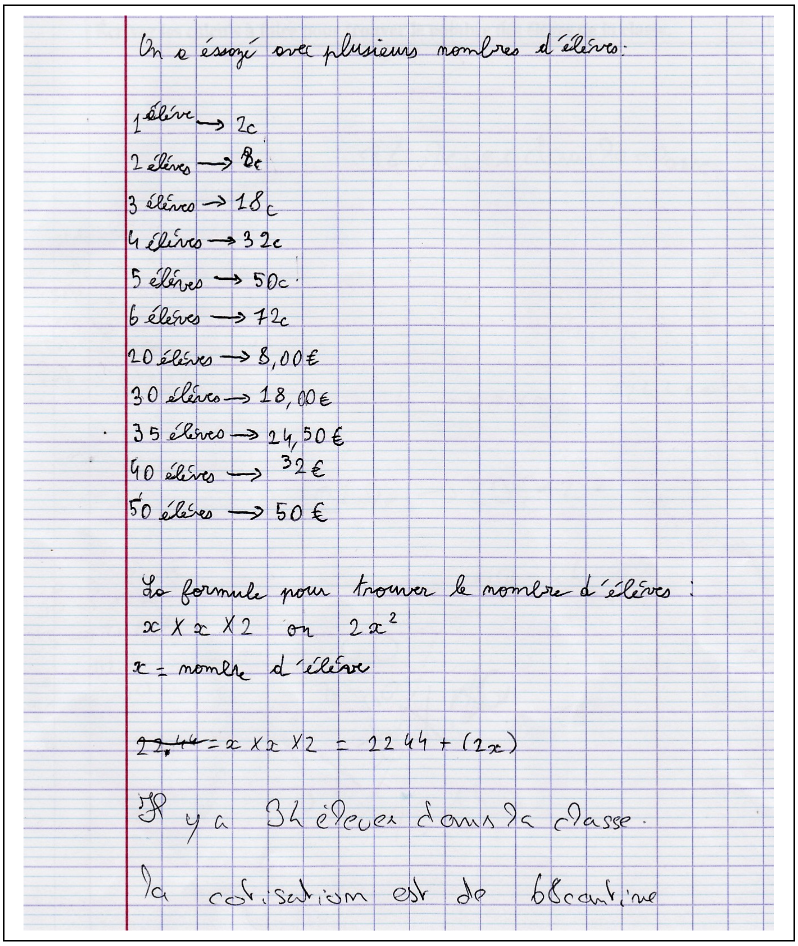

* 22 e 44 → 264 centimes
* x : nb d'élèves
$(x-1)\times x$
* $(x-1)\times 2 = 2x-2$
* $2x-2 = 2264$
* $2x = 266$
* $x = \frac{266}{2} = 133$
* $(x-1)\times(2x-2) = 264$
* $2x^2 - 2x - 2x + 2 = 264$
* $2x^2 - 4x = 262$
* $2xx - 4x \rightarrow 2xx - 2\times 2\times x$
* $2x(x-2) = 262$
* $x(x-2) = 131$
* $x \times 2x = 264$
* $x^2 = \frac{264}{2}$
* $x^2 = 133$
* $x = 11,53$
* $(11,53-1)\times 2 = 221$

fig 1: Copia com equazioni

In due elaborati è stata scoperta l'idea di funzione, nel suo registro «oggetto-immagine» come nel della figura 2 di categoria 10.


On a essayé avec plusieurs nombres d'élèves:

1 élève → 2c
2 élèves → 8c
3 élèves → 18c
4 élèves → 32c
5 élèves → 50c
6 élèves → 72c
20 élèves → 8,00€
30 élèves → 18,00€
35 élèves → 24,50€
40 élèves → 32€
50 élèves → 50 €

La formule pour trouver le nombre d'élèves :
x X x X 2 ou $2x^2$
x = nombre d'élève

~~22,44~~ = x X x X2 = 2244 ÷ (2x)

Il y a 34 élèves dans la classe.

La cotisation est de 66 centime

fig 2: Idea di funzione, nel suo registro «oggetto-immagine»

- E in della figure 3 (l'utilizzo di un tabulatore del computer sembrava abbastanza familiare sembrava abbastanza familiare in questa classe di categoria 9), i titoli delle due colonne sono sbaglaiti.

Per andare più lontano

Categorie di procedure

***A livello** 7 (62 elaborati esaminati):*

- in 3 utilizzano un'incognita e scrivono l'equazione corretta: 2X (X-1) = 2244 anche se non esplicitano «chiamiamo X …», dimostrando così una padronanza iniziale della nozione di funzione, poi:

  uno cerca 2 numeri consecutivi il cui prodotto sia 1122,
  un secondo fa il «tentativo corretto» nella sua equazione,
  il terzo fa 6 tentativi organizzati in una tabella;

- in 6 fanno almeno due tentativi «ragionati»;

- in 9 «verificano» soltanto che 34 è il numero di allievi cercato;

- in 3 cercano di trovare come quota di ognuno un numero intero. Per esempio: dividendo 2244 per possibili numeri di allievi «abbiamo trovato 22 e 33»

nombre d'élève	Sandra	Argent donné par élève	somme totale
21	0,42	8,82	9,24
22	0,44	9,68	10,12
23	0,46	10,58	11,04
24	0,48	11,52	12
25	0,5	12,5	13
26	0,52	13,52	14,04
27	0,54	14,58	15,12
28	0,56	15,68	16,24
29	0,58	16,82	17,4
30	0,6	18	18,6
31	0,62	19,22	19,84
32	0,64	20,48	21,12
33	0,66	21,78	22,44
34	0,68	23,12	23,8
35	0,7	24,5	25,2
36	0,72	25,92	26,64
37	0,74	27,38	28,12
38	0,76	28,88	29,64
39	0,78	30,42	31,2
40	0,8	32	32,8

fig 3. Uso di un tabulatore (categoria 9)

A livello 8 *(77 elaborati esaminati):*

- in 14 utilizzano un'incognita anche se non esplicitano «chiamiamo X …», o calcolano una radice quadrata:

uno solo scrive l'equazione corretta poi «verifica» che 34 va bene;
un altro calcola la radice quadrata di 1122 poi prova, di seguito, 32 x 33 e 33 x 34;

- in 12 scrivono $2X^2$ al posto di 2X (X-1) e/o calcolano la radice quadrata di 1122 dando poi gli «arrotondamenti» 33 o 34 di 33,5 o 33,496;

- in 11elaborati fanno almeno due tentativi «ragionati»;

- in 9 «verificano» soltanto che 34 è il numero di allievi;

- in 3 cercano di trovare come quota di ciascuno o come numero di allievi un numero intero. Uno divide 22,44 per 1,02; 0,51; 2,04; 0,68; 0,66; 0,44 e trova gli interi 22, 44, 11, 33, 34, 51 e conclude: ci sono troppi studenti in una classe o troppo pochi; un altro divide 2244 per 2, 11, 22, 44, 66, 132 ed accetta l'ultimo risultato: 17 allievi; un altro divide 2244 per 30, 45, 34, 33, ed accetta 34 dopo verifica.

Principali errori incontrati *oltre a quelli già descritti nelle procedure:*

A livello 7 *(62 elaborati)*

- in 10 elaborati hanno capito: «ogni allievo dà 2 centesimi» da cui le risposte sbagliate:

a) che non meravigliano chi le scrive: 112, 1122 o altre;
b) in cui trafficano per trovare un numero ragionevole: «1122 centesimi»;
o 1122 : 50 = 22,44 : 22 = 25 alunni. (744, 713);
c) o che li meravigliano;

- in 14 elaborati includono (esplicitamente) il contributo di Sandra nei 22,44 euro. Alcuni scrivono 34 x 0,66 = 22,44 … e danno la risposta corretta! Altri: «fra 33 e 34 allievi», o ancora: « 33,5 alunni perché (2 x 33,5) x 33,5 = 2244,5 è strano che ci sia un mezzo allievo»;

- in 10 elaborati si trovano 11 o 22 o 102 allievi, perché:

in 6 elaborati 22 x 1,02 = 22,44;

in 3 copie: 11 x 2,04 = 22,44;
in 1 copia: 102 x 0,22 = 22,44;

- 14 elaborati presentano errori non identificabili:

- in 1 copia si «verifica» che ci sono 36 allievi: «35 x 35 x 2 = 24,50 e 35 + 1 = 36»;

- 13 copie fanno come con «l'età del capitano» come «22,44 : 11,22 = 2 centesimi, da cui 11 allievi» ; «11 allievi perché 11 ξ 2 ξ 11 = 22,22; 0,11 x 2 = 0,22; 22,22 + 0,22 = 22,44»; «0,44 x 2 = 0,88; 22,44 : 0,88 = 25; ci sono 25 allievi».

- in 3 elaborati trovano 33 con: «22 : 2 = 11; 44 : 22 = 22; 22 + 11 = 33»;

- in 1 copia si trova 52 allievi: «44 x 22 allievi = 968; 968 x 2 = 1936; 1936 + 7 x 44 = 2244; 51 + 1 = 52»;

- in un'altra scrivono: «44 : 2 = 22; 44 : 11 = 4; quindi 4 allievi che danno 44 centesimi»;

- ed infine: «17 allievi perché 22,44 : 17 = 0,19»…

A livello 8

- in 12 elaborati hanno capito che: «ogni allievo dà 2 centesimi» da cui le risposte sbagliate:

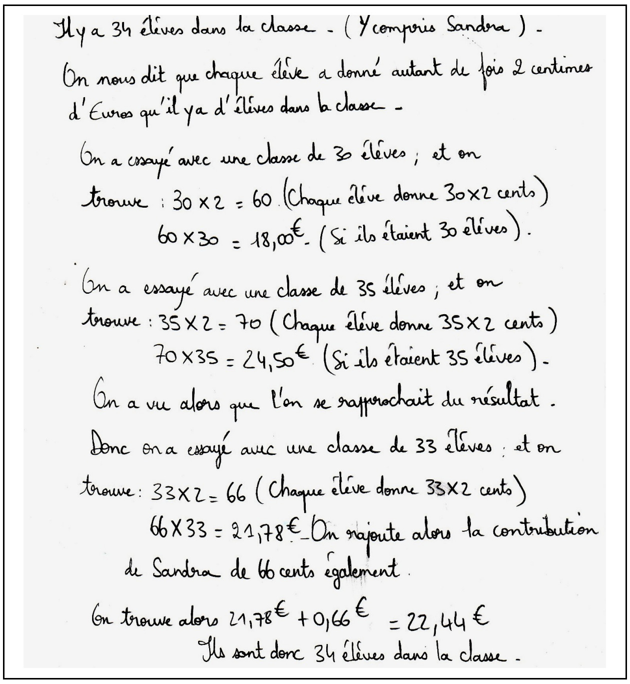
a) che non meravigliano chi le scrive: 112, 1122 o altre (5 copie);
b) in cui trafficano per trovare un numero ragionevole: 2244 : 2 = 1122; 1122 : 3 = 374; donc 22,44 : 3,74 = 6 allievi;
in alcuni elaborati non si meravigliano di questi risultati;

- in 20 elaborati includono (esplicitamente) il contributo di Sandra nei 22,44 euro;

- in 5 trovano comunque 34 allievi perché 34 x 0,66 = 22,44;

- una risposta: «fra 21 e 23 allievi perché 2 ξ 33 ξ 33 = 21,78 e 2 ξ 34 ξ 34 = 23,02»;

- uin'altra: «33 ξ 2 ξ 33 = 2178; 2244 – 2178 = 66; quindi 33 allievi»;



Il y a 34 élèves dans la classe. (Y compris Sandra).
On nous dit que chaque élève a donné autant de fois 2 centimes d'Euros qu'il y a d'élèves dans la classe.
On a essayé avec une classe de 30 élèves ; et on trouve : 30 x 2 = 60 (Chaque élève donne 30x2 cents)
60 x 30 = 18,00€. (Si ils étaient 30 élèves).
On a essayé avec une classe de 35 élèves ; et on trouve : 35 x 2 = 70 (Chaque élève donne 35x2 cents)
70 x 35 = 24,50€ (Si ils étaient 35 élèves).
On a vu alors que l'on se rapprochait du résultat.
Donc on a essayé avec une classe de 33 élèves ; et on trouve : 33x2 = 66 (Chaque élève donne 33x2 cents)
66x33 = 21,78€. On rajoute alors la contribution de Sandra de 66 cents également.
On trouve alors 21,78€ + 0,66€ = 22,44€
Ils sont donc 34 élèves dans la classe.

fig 4. procedono per tentativi organizzati

- in 5 elaborati trovano 11 (o 12), 22 (o 23 allievi), perché: «22 x 1,02 = 22,44»;

- in 7 elaborati fanno calcoli a caso con i numeri dati (riferimento a «l'età del capitano»): per esempio

«22 : 2 = 11; 44 : 22 = 22; 22 + 11 = 33»;
e ancora: «48 x 48 = 2304; 2304 – 2244 = 56; 56 : 2 = 28. Ci sono 28 allievi»;
e infine: «2244 : 110 = 20 allievi».

La maggior parte degli alunni, a tutti i livelli, procedono per tentativi, quasi sempre disordinati (da quello che ci sembra alla lettura degli elaborati) ma qualche volta organizzati come nell'elaborato della figura 4.

A proposito della nozione di funzione

- La nozione di funzione è innanzi tutto implicitemente presente nell'introduzione di una incognita identificata con una lettera, prima che essa possa, secondo il contesto del problema, acquistare lo statuto di variabile. La risoluzione di un'equazione è dunque preliminare alla nozione di funzione, se essa è esplicitamente interpretata da una domanda del tipo : « tra tutti i valori che può assumere *n* (o *x*), qual è quella (o quella) che soddisfa alle condizioni del problema? »

- Anche lo stabilire una relazione fra variabili in seno ad una formula è precursore dell'idea di funzione. Essendo questa formula associata ad una condizione (per esempio = 0), gli allievi possono interpretarla in termini di relazione oggetto-immagine : «fra tutti i valori che si ottengono da questo calcolo a partire da quelli di *n* (o *x*), ce ne sono che verificano la condizione?».

- In questo problema 15 del mazzo di fiori, in certi elaborati gli alunni hanno pensato alla radice quadrata come operazione inversa del quadrato, indicando, quindi, la presenza dell'idea di funzione.

- La nozione di funzione è stata tardivamente scoperta nella storia della matematica (Leibniz), successivamente compresa come una formula che collega delle variabili, e infine rappresentata in altri modi (algoritmi, tabelle, grafici…). La nozione di funzione acquisterà il suo effettivo statuto quando gli allievi potranno passare da un registro di rappresentazione ad un altro. Le analisi dei problemi del rally mostrano la difficoltà di questo passaggio concettuale che si costruisce durante tutto il corso degli studi secondari.

Bibliografia

Henry, M. Le concept de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 6, Parma 2006. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, ARMT, 2007, p. 151-168.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.