Il tempo della vendemmia[1]

Groupe fonction

Parole chiave : Funzione, relazioni funzionali, proporzionalità, sistema di equazioni lineari

Il problema

Il problema è quello di trovare i diversi modi per ottenere le coppie (18 ; 13) per addizionare tre tipi di coppie (3 ; 2), (2 ; 1) e (1 ; 1) in un contesto di trasporto di due tipi di recipienti con tre mezzi di trasporto (sistema lineare di due equazioni con soluzioni intere e strettamente positive).

Il tempo della vendemmia

Nelle vigne di M.Brunello un giorno di vendemmia con i grappoli raccolti si sono riempite 18 tini grandi e 13 tini medie. Per il trasporto alla cantina, M.Brunello dispone di tre trattori:

- il trattore A può trasportare a pieno carico tre tini grandi e due medi;
- il trattore B può tasportare, a pieno carico, due tini grandi e uno medio;
- il trattore C può trasportare, a pieno carico, un tino grande e uno medio.

Quel giorno, M. Brunello ha utilizzato almeno una volta, tutti i suoi trattori e a pieno carico.

Quanti viaggi potrebbe aver fatto M. Brunello per trasportare con ciascuno dei suoi trattori tutti i tini alla cantina?

Descrivete tutti i viaggi possibili e spiegate come li avete trovati.

Compito da risolvere e saperi mobilizzati

Per le categorie considerate si possono evidenziare differenti tipi di procedure. In ogni caso l'utilizzo della proporzionalità, per il calcolo del numero di tini trasportati da un trattore durante diversi viaggi di andata e ritorno, è un prerequisito. Si deve considerare il numero di vincoli necessari.

a. Una procedura possibile: identificazione di un problema che richiede una messa in equazione algebrica, per la quale può essere anticipato un metodo risolutivo. Identificazione delle incognite del problema (per esempio a, b, c i numeri rispettivi di viaggi dei trattori A, B, C, delle condizioni su queste incognite (interi strettamente positivi) e delle relazioni che le legano ($3a+2b+c=13$). Applicazione di un metodo risolutivo adattato, per esempio, ottenere per differenza $a+b=5$ e costruire le soluzioni con numeri interi naturali diversi da zero: (1;4), (2;3), (3;2), (4;2). Ogni coppia permette di determinare il valore corrispondente di c (rispettivamente 7,6,5,4). Si ottengono cosi' quattro possibilità.

Nota: è possibile ridurre la ricerca:

- intuitivamente e tenendo conto che i trattori fanno almeno un viaggio. Si è condotti a fare un lavoro equivalente alla risoluzione di $3a'+2b'+c'=12$ e $2a'+b'+c'=9$ il che limita il numero di casi da studiare.
- lavorando sull'aspetto sintattico e deducendo dalle equazioni che $a+b=5$. Difficilmente si può riconoscere che questa deduzione si trovi senza il ricorso al quadro algebrico.

[1] Problème 14 de l'épreuve II du 14e rallye, destiné aux catégories 7, 8, 9, 10.

b. Altra procedura possibile: operare nel campo moltiplicativo e additivo, con degli interi, in modo organizzato (eventualmente con una tabella) tenendo conto delle caratteristiche di ogni trattore e del numero di tini trasportati che aumenta con il numero di viaggi. Cominciare per esempio scegliendo il numero massimo di viaggi del trattore A, assicurarsi che 6 viaggi non possono convenire, che 5 possono permettere di trasportare 18 tini grandi ma non 13 medi (si trasporterebbero 18 tini grandi e 12 medi, che non è sufficiente).

Supporre poi che il trattore A faccia 4 viaggi (12 CG, 8 CM), e bisogna allora testare tutte le possibilità per i trattori B e C. Si ottiene così una prima soluzione: 4 viaggi per A, 1 per B e 4 per C.

E così di seguito sino ad ottenere le altre tre soluzioni: 3 viaggi per A, 2 per B e 5 per C, 2 viaggi per A, 3 per B, 6 per C e 1 viaggio per A, 4 per B e 7 per C.

c. Determinare una soluzione (per tentativi) ottenere le altre osservando che un viaggio di A equivale a uno di B e uno di C, assicurarsi dell'esaustività.

Così si può provare a distinguere due tipi di saperi mobilizzati: da un lato quelli legati al quadro delle equazioni lineari i dall'altro quelli legati all'aspetto funzionale.

Per questi ultimi si possono distinguere due aspetti:

- la necessaria messa in atto di un ragionamento che rivela la proporzionalità per il calcolo del numero di tini trasportati da un trattore durante molti viaggi di andata e ritorno

- l'utilizzo pratico di una o due funzioni in più variabili. Il calcolo delle immagini nel campo additivo e moltiplicativo su degli interi.

Resultati

Su 550 classi di 9 sezioni che hanno partecipato alla prova II del 14° RMT,

Punti attribiti	0	1	2	3	4	Nb classi	m
Categoria 7 (en %)	42	30	13	11	5	240	1,08
Categoria 8 (en %)	28	34	15	12	11	196	1,45
Categoria 9 (en %)	30	32	14	7	18	88	1,52
Catégorie 10 (en %)	15	31	12	19	23	26	2,04
Insieme (en %)	34	32	14	11	10	550	1,32

Secondo i criteri determinati nell'analisi a priori:

4 : risposta corretta (le 4 possibilità: 4 viaggi per A e 1 per B e 4 per C; 3 viaggi per A, 2 per B e 5 per C; 1 viaggio per A, 4 per B e 7 per C) ben argomentate
3 : scoperta di 3 possibilità corrette con giustificazione
2 : scoperta di 2 possibilità con giustificazioni oppure 3 corrette e 1 o più possibilità sbagliate.
1 : una sola possibilità e/o prove o ragionamenti che attestano una comprensione iniziale del problema
0 : incomprensione del problema

Globalmente questo problema è stato dunque mediamente risolto con successo, compresa la categoria 10.

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Dagli elaborati con 0 punti si può percepire che la comprensione del testo e la sua appropriazione si rivelano molto difficili. La molteplicità dei vincoli da imporre e trasformare in certe forme sintattiche si rivela un ostacolo. Si identificano anche classi che hanno separato il problema in tre : Quanti viaggi col trattore A per trasportare tutti i tini, poi con il trattore B, poi col C.

Altre classi non hanno riconosciuto che i trattori erano sempre a pieno carico, altre ancora non hanno tenuto conto del fatto che ogni trattore faceva almeno un viaggio. Si riconoscono qui le difficoltà di trattamento dell'enunciato, sia le difficoltà legate alla gestione di troppi vincoli.

Le procedure utilizzate dalle classi messe in atto nella ricerca sono nel complesso delle procedure per tentativi molto poco organizzati e che denotano strategie aritmetiche.

Le poche procedure organizzate sono poco produttive, non si vedono né una tabella ben strutturata né liste appropriate (tranne che nella categoria 10). Si osservano anche strategie figurative, in cui gli allievi rappresentano i tini con barre di differenti dimensioni (compresa la categoria 9). La maggior parte degli elaborati dà soluzioni corrette organizzando raggruppamenti. Si riconoscono anche procedure spesso utilizzate nei livelli inferiori e al contrario, anche ai livelli 8, 9, 10 non compaiono strategie algebriche.

E da notare che per i livelli osservati e per i protocolli che consentono l'analisi, la questione della proporzionalità non pone difficoltà.

Indicazioni didattiche

L'utilizzo di questo problema in classe può essere fatto con diversi obiettivi.

Si può prima di tutto proporlo come un problema di ricerca senza obiettivi cognitivi, ma lavorando principalmente per le competenze metamatematiche[1]. Si cerca allora di sviluppare sia il saper fare nella risoluzione di problemi, sia un'attitudine e un rapporto con la matematica adeguata per questi problemi.

Si può anche puntare a degli obiettivi cognitivi.

Due sembrano possibili :

- la messa in evidenza di un aspetto funzionale, nel senso che il numero dei tini trasportati dipende da tre variabili (il numero di viaggi di ciascun trattore). Si può allora, con la sintesi dopo una ricerca minimale, studiare l'insieme dei valori assunti dalla funzione (le variabili sono qui intere e delimitate) organizzando convenientemente la ricerca delle immagini.

- Una introduzione (o reintroduzione) dello strumento algebrico per risolvere problemi di questo tipo. Tenuto conto del risultato così ottenuto, lo strumento algebrico non è chiaramente disponibile per gli allievi considerati, e può allora intervenire, dopo l'elaborazione di soluzioni errate o parziali oppure troppo faticose, come nuovo strumento che permette di ottenere tutte le soluzioni possibili più efficacemente. La situazione si trova allora ad essere una soluzione-problema nel senso di Regine Douady e deve permettere un nuovo apprendimento.

In ogni caso, quale che sia l'obiettivo, è necessario che gli allievi possano realmente impegnarsi nella risoluzione del problema e riconoscere quella che è la soluzione.

Per questo, e poiché il quadro di una situazione di classe con l'insegnante lo permette, si rende necessario fare un lavoro sull'enunciato e sulla sua appropriazione. Il vocabolario e le formulazioni devono essere esplicitate se necessarie, le ambiguità eliminate, l'insieme dei

[1] Per gli obiettivi specifici e la messa in prtaica si rinvia ai lavori dell'IREM di Lione e a (Arsac et Mante 2007) e (Exprime 2010)

vincoli, posti, messo in evidenza e questo affinché la comunità di ricerca sia concorde sul problema da risolvere.

Realizzato ciò, le produzioni già raccolte mostrano che gli allievi devono poter impegnarsi nella ricerca e produrre dei ragionamenti che potranno essere esposti e poi discussi. Le diverse piste di ricerca analizzate permettono di riconoscere possibilità di sintesi differenti e coerenti con gli obiettivi posti.

Per andare più lontano

A. Come è stato detto precedentemente, le procedure messe in atto nel quadro delle prove del Rally non sono algebriche. Ciò non impedisce la loro varietà e la raffinatezza di alcune di esse

a. *Procedure che utilizzano rappresentazioni e tentativi figurativi*

i. Una procedura figurativa sbagliata: la figura 1 mostra una rappresentazione della situazione e una procedura che ricorda inizialmente quella di una divisione. Quando è impossibile proseguire con il trattore A (altrimenti il trattore C non sarebbe a pieno carico), si prosegue con il trattore C. In questo caso il vincolo sul trattore B è dimenticato.

ii. Una procedura figurativa: la figure 2 mostra, nella categoria 8, una procedure incompleta ma permette di ottenere 3 soluzioni su 4.

b. *Alcuni allievi che « riducono il problema »*

i. Utilizzando l'informazione sul numero minimo di viaggi: Un ulteriore eventualità è che gli alunni facciano uno sforzo e trovino due soluzioni possibili sulle quattro previste.

Più in generale si osserva che gli studenti, che si sono resi conto che ogni trattore aveva fatto almeno un trasporto di tini, arrivano più facilmente alla soluzione completa del problema.

Ciò può essere dovuto al fatto che coloro che hanno prodotto questo primo ragionamento avevano compreso in modo appropriato la situazione descritta nel testo oppure che la avevano semplificata o ne avevano ridotto il numero di casi da analizzare (figura 3).

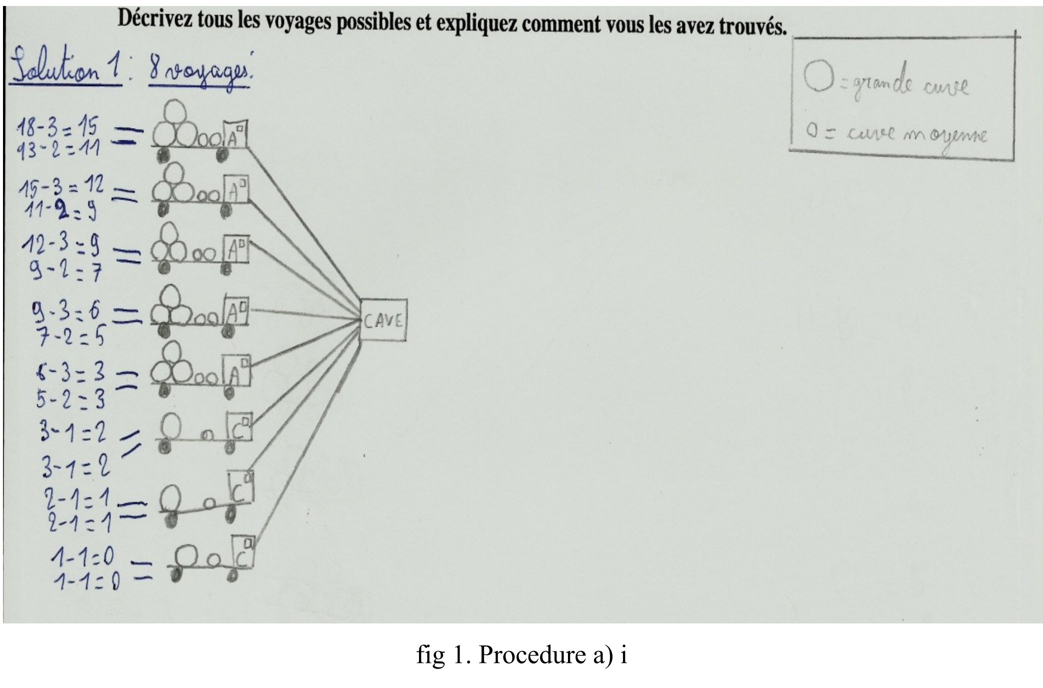


fig 1. Procedure a) i

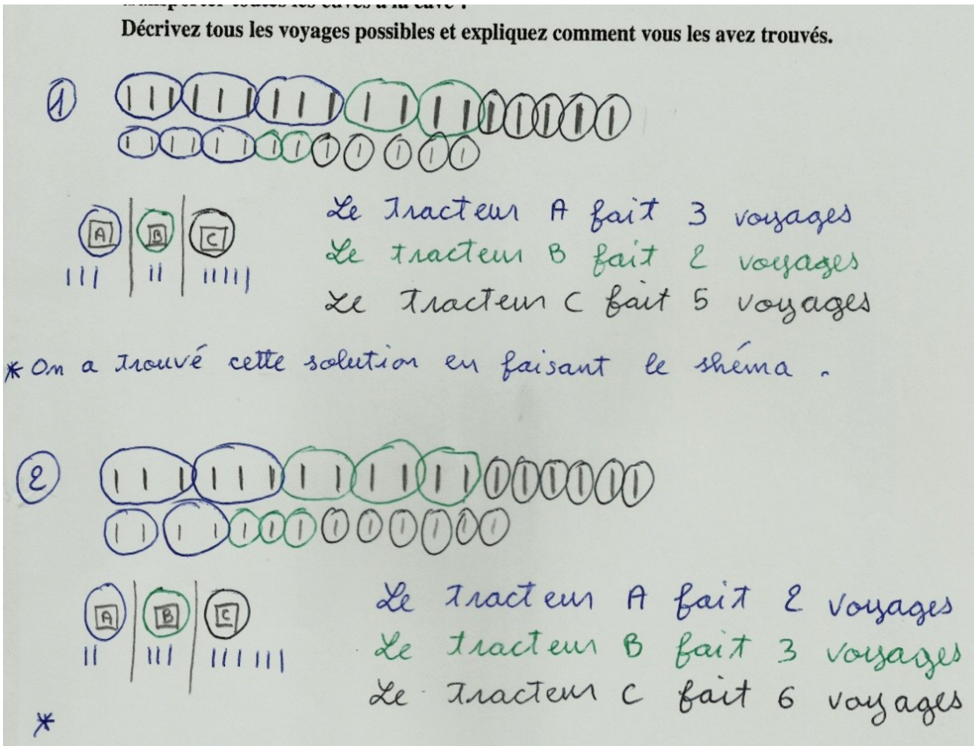


fig 2. Procedure a) ii

- On sait que M. Brunello à utilisé au moin une fois tout les tracteurs. Donc, on additionne les charges des tracteurs A, B et C, ce qui donne donc :

$3+2+1=6$

$2+1+1=4$

Il reste alors 6 grandes cuves et 4 moyennes cuves à transporter.

$18-6=12$

$13-4=9$

Il reste 12 grandes cuves et 9 mayennes cuves à transporter.

Méthode n° ①.

grandes cuves:	moyennes cuves :
A = 3	2
B = 2	1
C = 1	1

- je calcule les grandes cuves :

$5\times1+2\times2+1\times3=5+4+3=12$.

$12-12=0$

Il a emmené toutes les grandes cuves.

- je calcule les moyennes cuves :

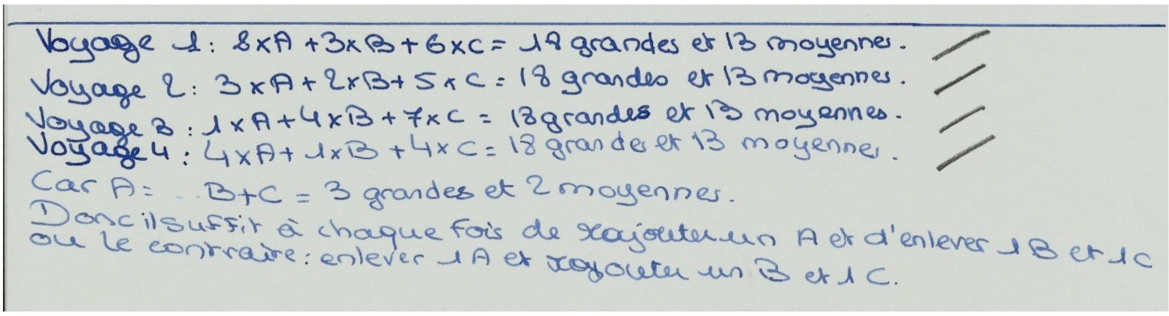
$5\times1+2\times1+1\times2=5+2+2=9$.

$9-9=0$

Il a emmené toutes les moyennes cuves.

fig 3. Procedure b) i

ii. Sono state prese in considerazione le "equivalenze" tra i viaggi dei trattori : Le altre soluzioni quindi sono facilmente ottenute quando se ne individua almeno una. Il percorso risolutivo completo non è sempre spiegato chiaramente (figure 4).


Voyage 1: 2xA + 3xB + 6xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 2: 3xA + 2xB + 5xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 3: 1xA + 4xB + 7xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Voyage 4: 4xA + 1xB + 4xC = 18 grandes et 13 moyennes.
Car A = B+C = 3 grandes et 2 moyennes.
Donc il suffit à chaque fois de rajouter un A et d'enlever 1B et 1C ou le contraire: enlever 1A et rajouter un B et 1C.

Viaggo 1: 2xA+ 3xB+ 6xC= 18 tini grandi e 13 tini piccoli
Viaggo 2: 3xA+ 2xB+ 5xC= 18 tini grandi e 13 tini piccoli
Viaggo 3: 1xA+ 4xB+ 7xC= 18 tini grandi e 13 tini piccoli
Viaggo 4: 4xA+ 1xB+ 4xC= 18 tini grandi e 13 tini piccoli
Perché A= B+C= 3 tini grandi e 2 tini piccoli

fig 4. Procédure b) ii

c. *divisione del numero di tini*

Altre procedure utilizzate si basano essenzialmente sulla divisione del numero di tini trasportati oppure per somma o sottrazione per arrivare a 18 tini grandi e 13 tini piccoli (figure 5).

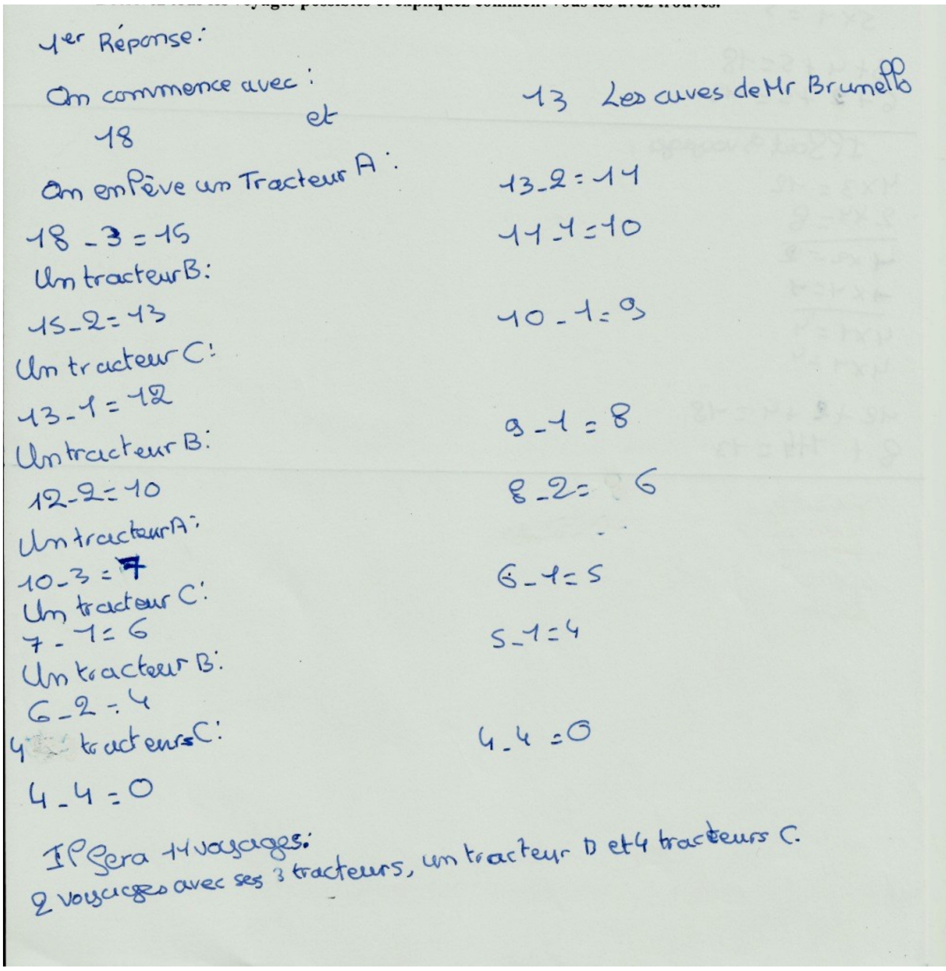

1er Réponse:
On commence avec: 18 et 13 Les cuves de Mr Brunetto
On enlève un Tracteur A: 18-3=15 13-2=11
11-1=10
Un tracteur B: 15-2=13 10-1=9
Un tracteur C: 13-1=12 9-1=8
Un tracteur B: 12-2=10 8-2=6
Un tracteur A: 10-3=7 6-1=5
Un tracteur C: 7-1=6 5-1=4
Un tracteur B: 6-2=4
4 tracteurs C: 4-4=0 4-4=0
Il sera 11 voyages: 2 voyages avec ses 3 tracteurs, un tracteur B et 4 tracteurs C.

fig 5. Procedure c)

In genere dopo le prime fasi di calcolo, gli studenti propongono una modalità che può soddisfare tutti i vincoli, ma raramente è spiegata.

d. *Il concetto di funzione*

Nella categoria 9 si può anche osservare che utilizzano il concetto di funzione individuando le variabili (numero di serbatoi grandi, numero trattore medio) ma la giustificazione delle soluzioni non è sempre la stessa (figure 6).

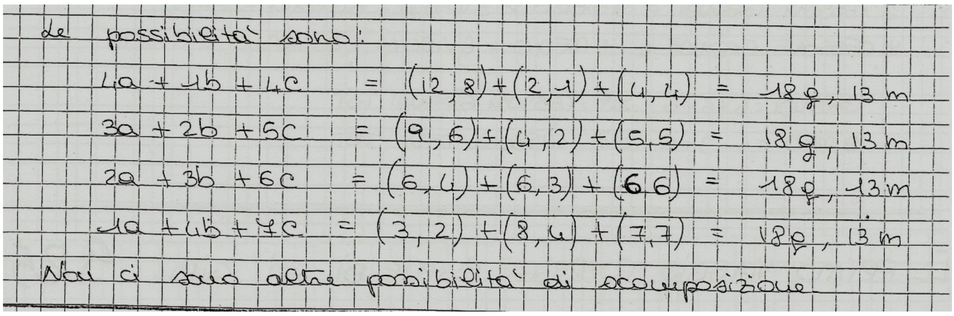

Le possibilità sono:
4a + 1b + 4c = (12,8) + (2,1) + (4,4) = 18 g, 13 m
3a + 2b + 5c = (9,6) + (4,2) + (5,5) = 18 g, 13 m
2a + 3b + 6c = (6,4) + (6,3) + (6,6) = 18 g, 13 m
1a + 4b + 7c = (3,2) + (8,4) + (7,7) = 18 g, 13 m
Non ci sono altre possibilità di scomposizione

fig 6. Procédure d)

e. *Soluzioni complete*

A partire dalla categoria 10 le giustificazioni delle soluzioni ottenute sono complete. "Abbiamo proceduto per tentativi dando alla A un valore crescente e calcolando il numero restante di trattori", e figura 7 oppure figura 8.

E i ragionamenti via via più complessi en la figure 9.

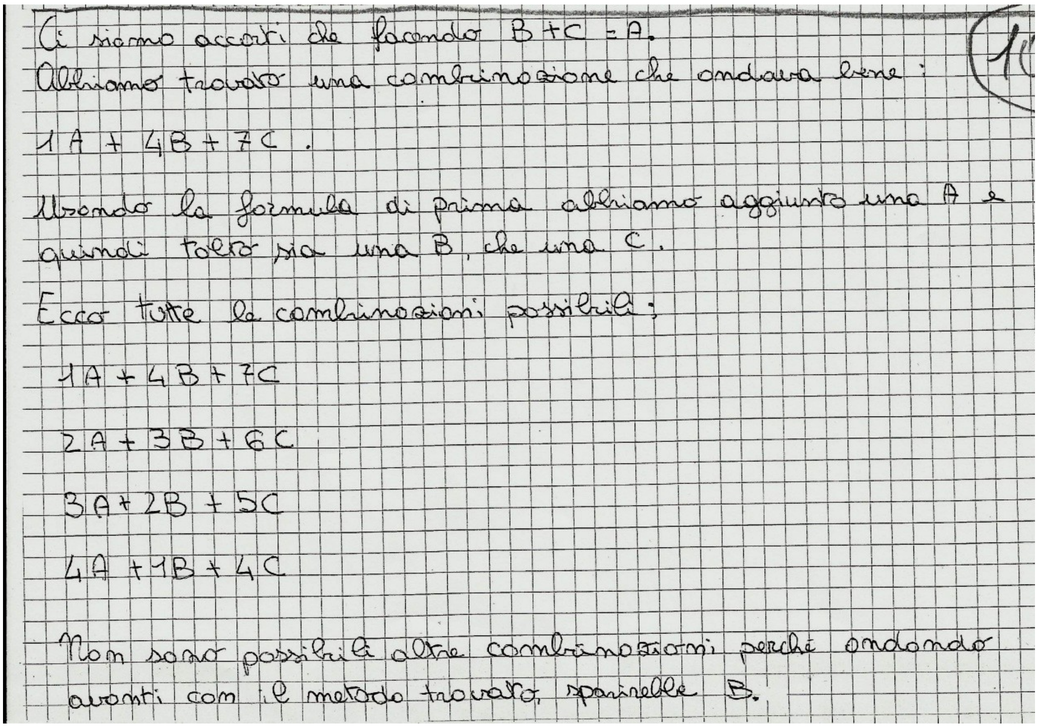
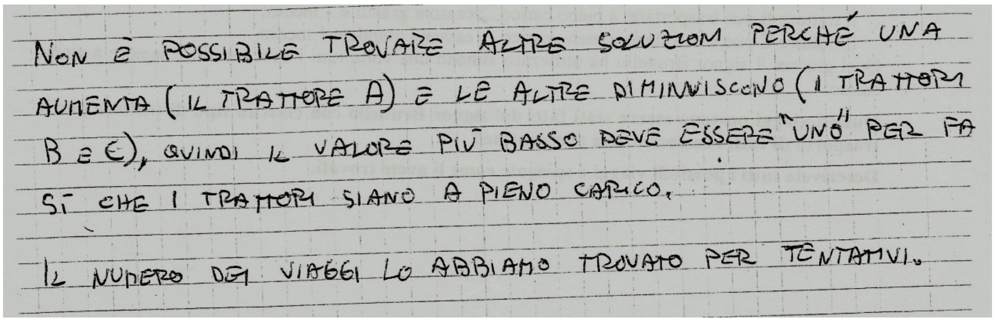
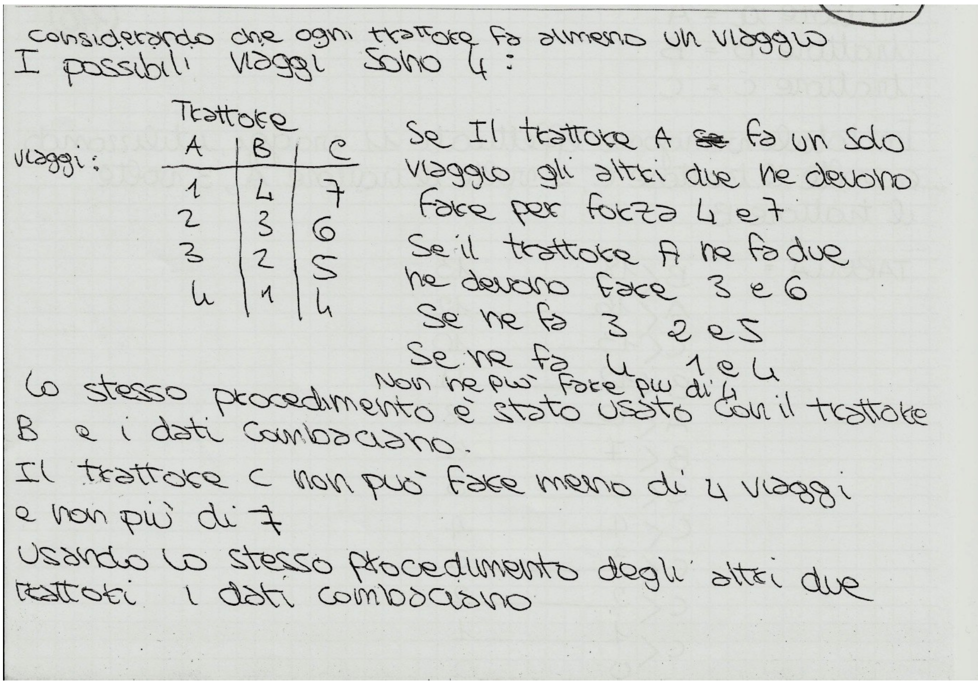

Ci siamo accorti che facendo B + C = A.
Abbiamo trovato una combinazione che andava bene:
1A + 4B + 7C.
Usando la formula di prima abbiamo aggiunto una A e quindi tolto sia una B, che una C.
Ecco tutte le combinazioni possibili:
1A + 4B + 7C
2A + 3B + 6C
3A + 2B + 5C
4A + 1B + 4C
Non sono possibili altre combinazioni perché andando avanti con il metodo trovato, sparirebbe B.

fig 7. Procédure e)


NON È POSSIBILE TROVARE ALTRE SOLUZIONI PERCHÉ UNA AUMENTA (IL TRATTORE A) E LE ALTRE DIMINUISCONO (I TRATTORI B E C), QUINDI IL VALORE PIÙ BASSO DEVE ESSERE "UNO" PER FA SÌ CHE I TRATTORI SIANO A PIENO CARICO.

IL NUMERO DEI VIAGGI LO ABBIAMO TROVATO PER TENTATIVI.

fig 8. Procédure e)


considerando che ogni trattore fa almeno un viaggio
I possibili viaggi sono 4:

Trattore

viaggi:	A	B	C
	1	4	7
	2	3	6
	3	2	5
	4	1	4

Se Il trattore A ~~se~~ fa un solo viaggio gli altri due ne devono fare per forza 4 e 7
Se il trattore A ne fa due ne devono fare 3 e 6
Se ne fa 3 2 e 5
Se ne fa 4 1 e 4
Non ne può fare più di 4
Lo stesso procedimento è stato usato con il trattore B e i dati combaciano.
Il trattore C non può fare meno di 4 viaggi e non più di 7
Usando lo stesso procedimento degli altri due trattori i dati combaciano

fig 9. Procédure e)

B. Una situazione simile

Siamo in grado di confrontare le modalità risolutive descritte in questo studio con il lavoro di Patrick Gibel. Egli ha suggerito nella sua ricerca una situazione sulla base di un problema pratico di matematica .

Questa è la situazione "Sciare a Gourette". Il contesto proposto sono le lezioni di sci e il loro costo. Questo è stato proposto in CM2(Brousseau, Gibel 2002, Gibel 2007).

Il testo del problema proposto :

Una giornata di sci a Gourette: sabato è stato organizzato per gli studenti del Cantone di Oloron. Il Consiglio d'istituto ha deciso che per questo speciale evento sarà possibile acquistare dei pass ad un prezzo vantaggioso. La stazione sciistica Gourette offre le seguenti tariffe: 216 Pass: 1275 F, 36 pass: 325 F, sei pass: 85 F.

Si sono iscritti 979 bambini, ma al momento della partenza, ci sono 12 assenti per malattia.

Il Presidente del Consiglio d'istituto ha dichiarato: "Peccato per questi assenti, ma non importa" e dichiara:" allora il costo sarà più basso." Sei d'accordo?

Si tratta di un problema di ottimizzazione lineare, ma le variabili del problema sono numerose 14-II e 14, giustificano il ricorso ad una funzione a tre variabili, che impediscono la rappresentazione nel piano (escludendo così il metodo grafico) e rende più difficoltoso l'uso di tabelle (che non sono più a doppia entrata !).

E evidente che questo problema presenta anche molte altre sfide, per esempio:

- Capire la situazione di riferimento sociale e commerciale
- Identificare le variabili in gioco e individuare le relazioni di proporzionalità.
- Percepire in particolare che, per ogni caso, il numero di pass è "proporzionale" al prezzo da pagare, ma che non vi è proporzionalità diretta tra il numero di pass e i prezzi praticati.
- Capire che per rispondere alla domanda è necessario calcolare due costi minimi (che dovrà essere determinato) e confrontarli tra loro.

Patrick Gibel ha riportato in dettaglio i risultati di questa ricerca didattica (Gibel 2007). Va poi rilevato che:

- l'enunciato non permette agli alunni di determinare la situazione oggettiva. La non proporzionalità diretta è sollevata raramente, più numerosi sono i gruppi che elaborano dei modelli non corretti.
- la risoluzione è difficile. Gli alunni non comprendono sufficientemente il problema e non ne comprendono tutte le variabili. L'aspetto ottimizzazione non è stato compreso da una grande parte di essi.
- le difficoltà appaiono non tanto a livello di tecniche del calcolo piuttosto a livello di ragionamento. Una soluzione diversa sembra quindi necessaria per comprendere la complessità della situazione.

Nell'articolo (Gibel 2007), l'autore osserva che gli scambi dopo la ricerca sono difficili e che le argomentazioni sono spesso retoriche e di carattere semantico. Egli fornisce conclusioni chiare e dettagliate sulle ragioni per le quali la soluzione non è stata trovata per una gran parte degli studenti, e in particolare :

"The study shows that although the students, faced with a problem situation elaborated and conducted by the teacher, have certainly produced forms of reasoning, they have not made much progress in their practice of reasoning. Indeed, they have not reflected back on their reasoning, on its validity, relevance or adequacy because the teacher was not able to process it. He could not respond to this reasoning by logical arguments based on the objective situation; he was forced to use rhetorical means. Now, it is not the complexity of the students' reasoning that forced the teacher to use this type of means but the fact that the problem situation could not be devolved to the students. This implies that it is not the teacher's management of the whole class presentation and discussion of the students' work that is challenged here, but rather the nature itself of the situation set up by the teacher, which strongly constrains the possibilities of really taking into account the students' reasoning."[1]

e ancora:

"If a situation provides the teacher with the possibility of devolving to the students an "autonomous" (or "self-contained") situation of action, then, according to the theory of didactical situations in mathematics, during the phase of analysis of students' solutions the teacher can refer to the objective situation. This is because the students can develop their

[1] Traduzione libera : Lo studio dimostra che, anche se gli studenti, di fronte a una situazione problematica elaborata e condotta dal docente, hanno certamente generato forme di ragionamento, non hanno fatto progressi rilevanti nella loro pratica di ragionamento. Essi, infatti, non hanno riflettuto sul percorso risolutivo proposto, sulla sua validità, rilevanza o adeguatezza perché l'insegnante non era in grado di elaborarlo. Non poteva rispondere a questo ragionamento con argomentazioni logiche sulla base della situazione oggettiva. Ora, non è la complessità del ragionamento degli studenti che ha costretto l'insegnante a utilizzare questo tipo di mezzi, ma il fatto che la situazione problema non poteva essere passata agli studenti. Ciò implica che non è la modalità di presentazione alla classe del docente o la sua discussione con gli studenti che viene sfidato qui, ma piuttosto la tipologia della situazione, proposta dall'insegnante, che vincola fortemente le possibilità di prendere davvero in considerazione il ragionamento degli studenti.

personal strategies and forms of reasoning related to the situations with which they are confronted. The teacher does not have to have recourse to rhetorical didactical means to process students' forms of reasoning.[1]

C'è difficoltà a comprendere il significato della situazione oggettiva. Questa difficoltà non può essere superata con elementi retorici che l'insegnante potrebbe mettere in atto. Si tratta piuttosto di concepire un dispositivo/situazione che permetta una autentica appropriazione dei contenuti e ne consenta la piena comprensione.

Si può concludere allora con la necessità di proporre dei problemi di ricerca che permettono una soluzione reale e autentica che può fare riferimento ad un mezzo oggettivo che dia senso alla situazione ed agli scambi che si potranno instaurare. E al di là del problema matematico proposto, resta una tappa fondamentale la proposta di una riflessione sul dispositivo didattico che permetta agli alunni di confrontare i loro saperi.

Bibliografia

Arsac, G. et Mante, M. (2007). *Les pratiques du problème ouvert*. Scéren CRDP de Lyon.

Brousseau, G. & Gibel, P. (2002), Influence des conditions didactiques sur l'apparition, l'usage et l'apprentissage des raisonnements en classe, dans *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques,* ARDM et IREM Paris 7.

EXPRIME (2010). *Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP

Gibel, P. (2007) Analysis of the teachers's arguments used in the didactical management of a problem solving situation, CERME 5.

---

[1] Traduzione libera : Se una situazione offre all'insegnante la possibilità mettere gli studenti in una situazione nella quale possano agire in " autonomia "(o" self-contained "), poi, per la teoria costruttivista, l'insegnante può fare riferimento alla situazione oggettiva emersa durante la fase di analisi degli studenti. Questo perché gli studenti possono sviluppare le loro strategie personali e le forme di ragionamento che sono strettamente legate alle situazioni con cui si sono confrontati. L'insegnante non deve ricorrere a mezzi didattici retorici per stimolare forme di ragionamento da parte degli studenti.