Calcolatrice speciale[1]

Groupe fonction

Parole chiave : Funzione, relazione funzionale, corrispondenza oggetto-immagine, espressione algebrica, algoritmo

Il problema

Il problema è quello di trovare una funzione valida per le tre coppie oggetto-immagine (5 ; 25), (7 ; 31), (10 ; 40) e calcolare l'immagine di 9 attraverso questa funzione (la funzione più semplice è una funzione lineare).

Calcolatrice speciale

Sofia possiede una calcolatrice molto speciale con un tasto ☺ .

Quando Sofia preme 5 e ☺, la sua calcolatrice mostra: 25

Quando Sofia preme 7 e ☺, la sua calcolatrice mostra: 31

Quando Sofia preme 10 e ☺, la sua calcolatrice mostra: 40

Quando Sofia preme 9 e ☺, che cosa potrebbe mostrare la sua calcolatrice speciale?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Compito da risolvere e saperi mobilizzati

- Capire che il tasto « sorriso » fa corrispondere ad ogni numero che si immette nella calcolatrice una « immagine ». Osservare che la corrispondenza oggetto-immagine non è una semplice proporzionalità (25 = 5x5, ma 31 ≠ 7x5).

- Considerare le variazioni corrispondenti fra oggetti e immagini a partire dai tre esempi dati: quando il valore introdotto aumenta di 2 (da 5 a 7), la sua immagine aumenta di 6 (da 25 a 31) e quando aumenta di 3 (da 7 a 10), l'immagine aumenta di 9 (da 31 a 40).

- Congetturare la stabilità di questa osservazione e concludere che per un ingresso uguale a 9 (7+2), la calcolatrice indicherà 37 (31+6).

- Più in generale, fare l'ipotesi che ogni volta che si aumenta di 1 il numero in ingresso, la macchina aumenta di 3 il numero mostrato (« sorriso » è la funzione lineare : 10 + 3x).

L'analisi a priori mette in evidenza varie procedure che mostrano più o meno esplicitamente la nozione di funzione secondo il livello degli allievi:

1. Mettere in relazione le le variazioni fra oggetti e immagini per osservare sugli esempi dati che ogni volta che si aumenta di 1 il numero in ingresso, la macchina aumenta di 3 il numero mostrato. Fare (implicitamente?) l'ipotesi della generalità di questa proprietà (ipotesi di funzione lineare) e applicarla al valore 9.

2. Procedere con una tabella di numeri da completare e cercare delle regolarità, in particolare quelle evocate in precedenza

ingressi :	5	6	7	8	9	10
immagine :	25		31			40

[1] Problème 10 de l'épreuve II du 15e rallye, destiné aux catégories 5, 6, 7.

In questo caso, è sufficiente completare la successione aritmetica 25; 28; 31; 34; 37; 40 verificando che c'è il 31 e determinando il 37 come immagine di 9.

3. Da un punto di vista «funzionale», cercare delle relazioni dirette tra l'immissione e l'uscita: pensare ad una moltiplicazione, o ad un'addizione e rendersi conto che bisogna orientare le ricerche verso una composizione di due «funzioni semplici», per esempio di una moltiplicazione e di un'addizione. Una moltiplicazione per 3 fa corrispondere 3, 7 e 10 a 15, 21 e 30 che valgono 10 di meno delle immagini rispettive fornite dalla macchina. «La calcolatrice moltiplica per 3 poi aggiunge 10» (funzione lineare $x \rightarrow 3x + 10$) è dunque una congettura da accettare per le tre coppie date. L'immagine di 9 sarà allora $3 \times 9 + 10 = 37$.

4. Per gli allievi che avessero già incontrato delle rappresentazioni grafiche, utilizzare il fatto che le tre coppie (5;25), (7;31) e (10; 40) sono rappresentate da punti allineati.

Per le categorie considerate si possono evidenziare differenti tipi di procedure. In ogni caso l'utilizzo della proporzionalità, per il calcolo del numero di tini trasportati da un trattore durante diversi viaggi di andata e ritorno, è un prerequisito. Si deve considerare il numero di vincoli necessari.

Resultati

Su 1093 classi di 12 sezioni partecipanti alla prova II del 15° RMT,

Punteggi attribuiti	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*N classi*	*m*
Categoria 5 (in %)	27	11	5	20	37	240	2,30
Categoria 6 (in %)	32	3	8	19	37	468	2,25
Categoria 7 (in %)	23	3	5	16	54	385	2,75
Totale (in %)	28	5	7	18	43	1093	2,45

Secondo i criteri stabiliti dall'analisi a priori :

4 Risposta esatta (37) con spiegazione della « regola » trovata (verificata sulle coppie date e applicazione a 9, oppure con una tabella, o ancora con un grafico)
3 Risposta esatta con spiegazione incompleta (per esempio senza la verifica dei tre esempi dati)
2 Risposta esatta senza alcuna spiegazione
o emissione di una congettura, confronto con gli altri valori numerici, ma senza calcolare l'immagine di 9
1 Risultati come 45 o 36; con una congettura esplicitata ma non verificata per gli altri numeri dati e applicata direttamente al numero 9
0 Incomprensione del problema

Il tasso di riuscita medio, in punteggi attribuiti, è dello stesso ordine nelle categorie 5 e 6 (2,30 e 2,25) ; aumenta sensibilmente in categoria 7 (2,75).

La risposta corretta è stata trovata (2, 3 e 4 punti) da circa il 60% dei gruppi nelle categorie 5 e 6 e dai tre quarti in categoria 7. Quello che fa la differenza sono le spiegazioni e le verifiche.

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Non ci sono veri e propri « errori » per il 28 % dei gruppi che hanno avuto « 0 punti » (« incomprensione del probema »).

L'ostacolo principale è la formulazione dell'ipotesi di stabilità della relazione funzionale fra oggetto e immagine. Ciò mostra implicitamente un approccio alla nozione di funzione, che si manifesterà solamente ai livelli 9 e 10.

D'altra parte, un inizio di questa idea si può osservare nella costruzione di una tabella di valori (o di una messa in relazione dei valori in ingresso con i risultati mostrati dalla calcolatrice) che rispetti una certa regolarità fra i dati e le immagini corrispondenti. Può allora essere costruito un algoritmo di calcolo.

Anche al livello 5, sono state osservate tutte le diverse procedure previste nell'analisi a priori, esclusa la rappresentazione grafica, strumento non disponibile a questo livello. Gli elaborati si possono facilmente classificare in base ai criteri dell'analisi.

Indicazioni didattiche

Nelle condizioni di gara del RMT, il problema è alla portata della maggior parte dei gruppi di allievi di tutte le categorie, data la semplicità dei numeri proposti e l'evidenza della funzione. Anche senza avere affatto studiato le funzioni dal punto di vista matematico, i gruppi dimostrano una percezione già ben elaborata del concetto : una relazione o legame fra il numero che hanno immesso nella calcolatrice e il risultato mostrato. Ci sono tutti gli elementi : i tentativi per trovare il legame, le verifiche, il funzionamento su nuovi numeri. Ci si poteva aspettare di più ?

Nella pratica abituale di classe, le condizioni cambiano poiché l'insegnante è presente ; può organizzare dei momenti di messa in comune, dei controlli intermedi. Può anche arrivare a « fare risolvere » il problema assumendosi il carico dei momenti chiave della risoluzione ; ma con questi effetti del contratto didattico, non si raggiungerebbe lo scopo dell'attività, per esempio se si chiede esplicitamente agli allievi di *« trovare » una formula che contenga i calcoli da fare per sapere ciò che mostrerà la calcolatrice quando si preme il tasto di un numero*.

Occorre raggiungere i livelli da 8 a 10 (14-16 anni) per aspettarsi che la maggior parte degli allievi possa osservare e descrivere la regolarità delle variazioni sui tre esempi dati ed estrapolarla su altri numeri. Tuttavia la maggior parte dei gruppi individua la legge « x 3 + 10 », realizzando così l'obiettivo di questo problema rispetto ai livelli del RMT. La nozione di funzione come corrispondenza univoca tra dei dati numerici e i risultati mostrati dalla calcolatrice è quindi l'obiettivo didattico principale di questa attività.

Vogliamo sottolineare che la risposta non è unica dal punto di vista matematico, ma è indeterminata. Notiamo l'uso del condizionale nella domanda « …che cosa potrebbe mostrare la sua calcolatrice speciale? » che allude a questa indeterminazione, dal punto di vista del rigore. Quindi, un risultato diverso da 37 o una funzione diversa da quella proposta potrebbero non essere risposte « errate ». Per esempio, la risposta $f(9) = -91$ è coerente con la funzione polinomiale $f(n) = n^4 - 15n^3 + n^2 + 738\,n - 2440$ per la quale 5, 7 e 10 hanno come immagine 25, 31 e 40.

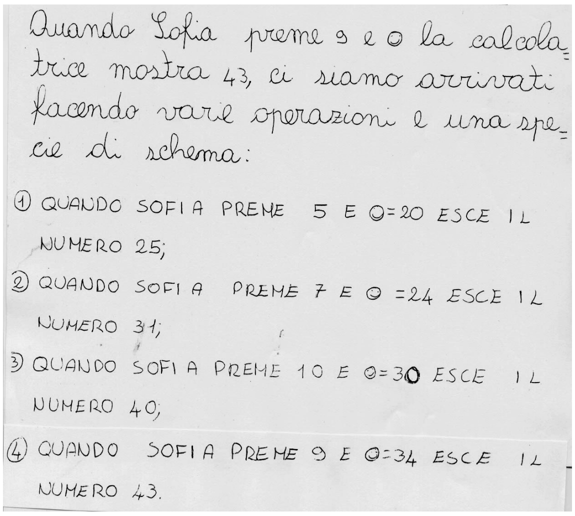
Per andare più lontano

Ecco qualche esempio tratto da elaborati di categoria 5, organizzati secondo una progressione dell'acquisizione della nozione di funzione.

1. Una procedura algoritmica errata

Possiamo vedere in questo elaborato (figura 1) di categoria 5 un grosso ostacolo che si oppone ad un approccio funzionale.

Il tasto ☺ opera in modo diverso a seconda dei numeri in ingresso. Gli allievi si collocano in un quadro additivo per attribuire al tasto un valore a partire dal risultato indicato, in modo che l'effetto del tasto sia quello di una semplice addizione. Non sappiamo perché il valore 34 è scelto per rispondere alla domanda relativa al dato in ingresso 9.


Quando Sofia preme 9 e ☺ la calcolatrice mostra 43, ci siamo arrivati facendo varie operazioni e una specie di schema:

① QUANDO SOFIA PREME 5 E ☺=20 ESCE IL NUMERO 25;

② QUANDO SOFIA PREME 7 E ☺ =24 ESCE IL NUMERO 31;

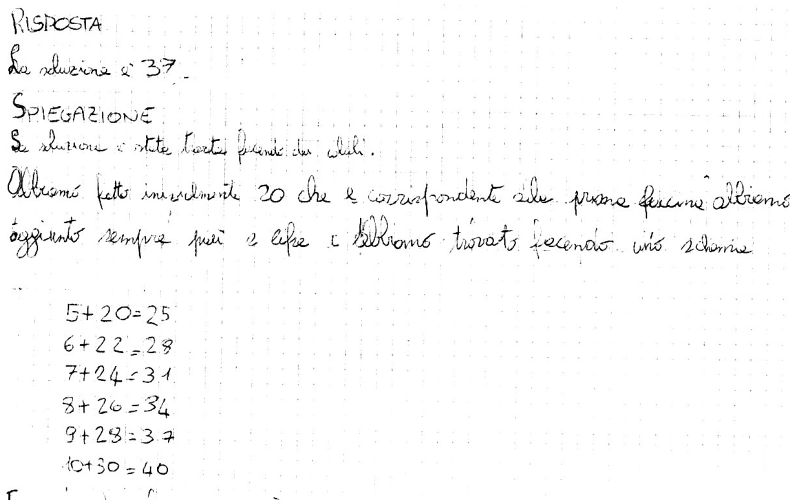
③ QUANDO SOFIA PREME 10 E ☺=30 ESCE IL NUMERO 40;

④ QUANDO SOFIA PREME 9 E ☺=34 ESCE IL NUMERO 43.

fig 1 : Procedura algoritmica errata

2. Un algoritmo basato sulle regolarità, che funziona nel contesto lineare del problema

Ponendosi in un quadro additivo (figura 2), a partire dal risultato 25, gli allievi hanno attribuito l'operazione + 20 al tasto ☺ applicato al numero 5. La ricerca sistematica di un algoritmo semplice li porta ad una progressione di 2 in 2 per interpretare gli effetti successivi del tasto ☺ applicato alla successione dei numeri interi. I valori dati per 7 e 10 confermano tale algoritmo e la risposta 37 ne deriva di conseguenza. Da questo punto di vista, il calcolo effettuato dal tasto ☺ dipende dal numero in ingresso e, pertanto, non può essere rappresentato da una funzione.


RISPOSTA

La soluzione è 37.

SPIEGAZIONE

La soluzione è stata trovata facendo dei calcoli.

Abbiamo fatto inizialmente 20 che è corrispondente alla prima facciamo abbiamo aggiunto sempre più 2 cifre e abbiamo trovato facendo uno schema

5+20=25
6+22=28
7+24=31
8+26=34
9+28=37
10+30=40

Troviamo che il numero è 37

fig 2 : Algoritmo che funziona nel contesto lineare del problema

3. Uno stesso algoritmo di calcolo eseguito da tasto ☺ su tutti i dati, senza arrivare ad un approccio funzionale

La prima frase suggerisce (figure 3) che questa procedura algoritmica mostra la funzione sottintesa al tasto☺, dato che la formula è quasi completamente scritta. Ma la seconda frase mostra che la successione dei calcoli non è concepita globalmente, dal punto di vista funzionale : l'algoritmo proposto dagli allievi consiste inizialmente nel moltiplicare il numero dato per 3, successivamente nell'aggiungere 10 al risultato. Abbiamo qualche dubbio su questa affermazione a proposito della seconda frase.

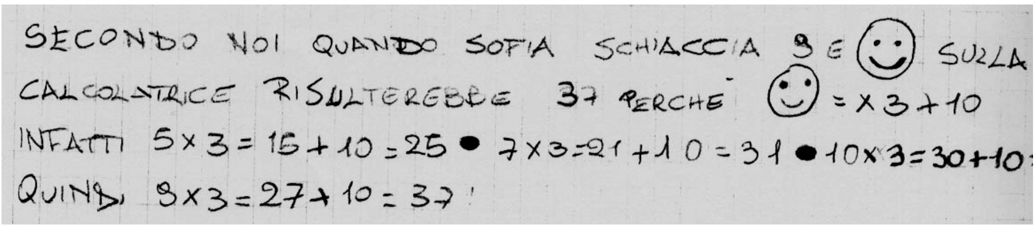

SECONDO NOI QUANDO SOFIA SCHIACCIA 9 E ☺ SULLA CALCOLATRICE RISULTEREBBE 37 PERCHÉ ☺ = X3+10
INFATTI 5×3=15+10=25 • 7×3=21+10=31 • 10×3=30+10=
QUINDI 9×3=27+10=37!

fig 3

4. Lo stesso algoritmo interpretato da una formula che favorisce un approccio funzionale implicito

La parola « tabellina » allude alla tavola della moltiplicazione. L'interpretazione della concatenazione dei calcoli in un'unica formula applicata ad un dato variabile fa qui ricorso ad uno strumeento funzionale implicito (figura 4).

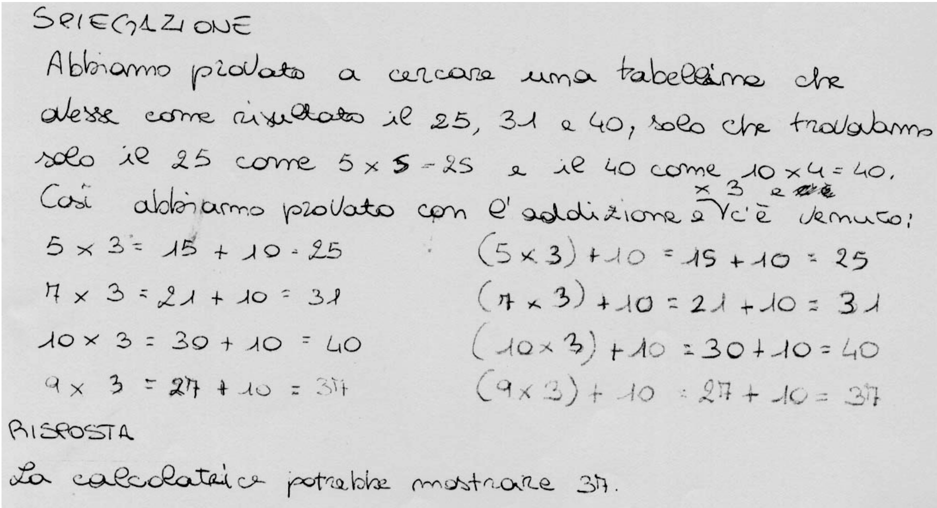

SPIEGAZIONE
Abbiamo provato a cercare una tabellina che desse come risultato il 25, 31 e 40, solo che trovavamo solo il 25 come 5×5=25 e il 40 come 10×4=40.
Così abbiamo provato con l'addizione e ×3 e c'è venuto:
5×3=15+10=25 (5×3)+10=15+10=25
7×3=21+10=31 (7×3)+10=21+10=31
10×3=30+10=40 (10×3)+10=30+10=40
9×3=27+10=37 (9×3)+10=27+10=37
RISPOSTA
La calcolatrice potrebbe mostrare 37.

fig 4 : Approccio funzionale implicito

5. Un'interpretazione funzionale esplicita che fa intervenire la nozione di variabile

Per esprimere la loro idea di funzione, questi allievi hanno voluto fare intervenire una variabile che hanno indicato … (figura 5).

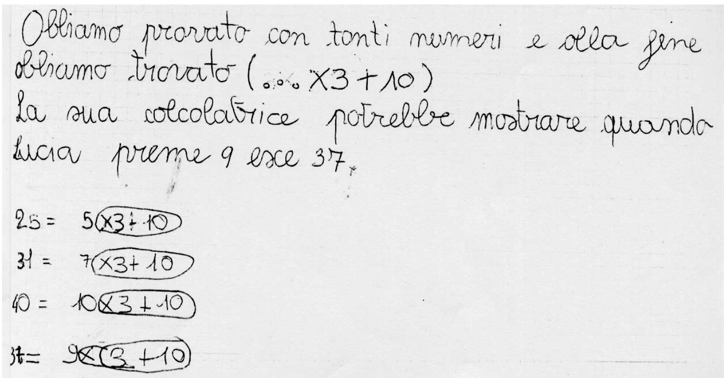

Abbiamo provato con tanti numeri e alla fine abbiamo trovato (.... X3+10)
La sua calcolatrice potrebbe mostrare quando Lucia preme 9 esce 37.
25 = 5(X3+10)
31 = 7(X3+10)
40 = 10(X3+10)
37 = 9(X3+10)

fig 5 : Approccio funzionale esplicito

Qui la funzione è esplicitamente data attraverso una formula di calcolo. Lo era anche nei due esempi precedenti, ma in modo meno evidente, privilegiando l'algoritmo di calcolo.

Le parentesi negli esempi trattati mostrano il simbolismo scelto da questi allievi per scrivere la funzione nella forma 25 = 5f, che significa, così come gli allievi la scrivono : « 25 = 5 a cui si applica f ».

6. Funzione considerata come operatore (ξ 3+10)

SOLUZIONE: Il tasto ☺ indica "...×3+10". La sua calcolatrice potrebbe mostrare 37.

RAGIONAMENTO

5 $\overset{(\times 3+10)}{☺}$ = 25

7 $\overset{(\times 3+10)}{☺}$ = 31

10 $\overset{(\times 3+10)}{☺}$ = 40

QUINDI...

9 $\overset{(\times 3+10)}{☺}$ = 37

Per prima cosa abbiamo cercato di scoprire che cosa hanno in comune le coppie di numeri 5 e 25, 7 e 31, 10 e 40. Abbiamo fatto tanti tentativi facendo +, -, ×, :. Così abbiamo scoperto che il tasto ☺ indica "... ×3+10".

fig 6 : Funzione considerata come operatore

Come nell'elaborato precedente, per esplicitare la funzione trovata, gli allievi hanno bisogno di fare intervenire la variabile, ancora indicata con … .

La nozione di funzione è qui chiaramente presente, l'etichetta f (… × 3 + 10) potrebbe anche figurare sul tasto ☺ come gli allievi esprimono chiaramente. Ma la comprensione di questa nozione raggiunge un livello superiore quando è esplicitamente espressa come un operatore sui dati. Da questo punto di vista gli schemi ricopiati non mostrano amiguità.

7. Due punti di vista complementari : lo studio di un operatore lineare e delle sue variazioni

Spiegazione

$+5 \xrightarrow{\times 3+10} 25 +$

$\overset{2}{+7} \xrightarrow{\times 3+10} 31 \overset{6}{+}$

$\overset{2}{+9} \xrightarrow{\times 3+10} 37 \overset{6}{+}$

$\overset{1}{10} \xrightarrow{\times 3+10} 40 \; 3$

Abbiamo provato a supporre che nel risultato visto che 31-25=6 e 7-5=2, abbiamo pensato che 9-7=2 anche 37-31=6, poi visto che 10-9 fa 1 40-37=3. Infine abbiamo provato con varie operazione che collegassero il numero con il risultato. L'operazione è ...: ×3 +10.

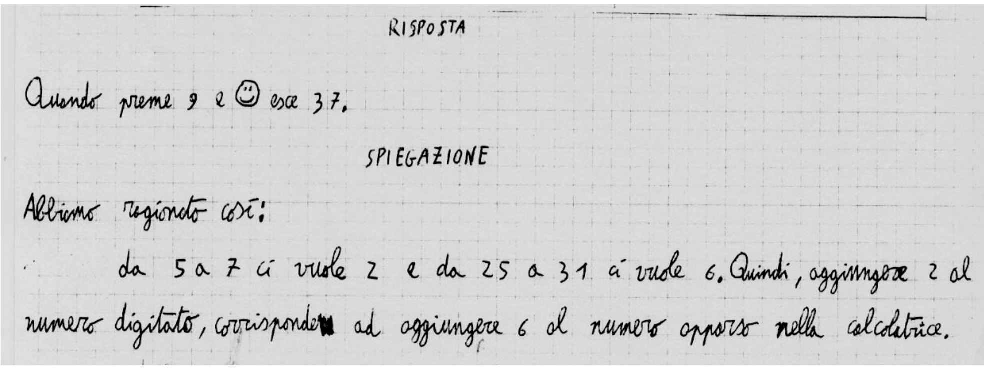
fig 7 : Funzione considerata come operatore

Le schema (figura 7) mostra chiaramente che la funzione cercata è considerata come operatore che ad un dato in ingresso fa corrispondere un'immagine, sempre calcolata con × 3 + 10. Ma, nelle loro spiegazioni, gli allievi hanno fatto intervenire le variazioni di questa funzione lineare, osservando la proporzionalità fra le differenze dei dati e le corrispondenti differenze delle immagini.

8. Sfruttamento del modello affine

Gli allievi si collocano ora completamente nel quadro affine (figura 8), osservando su una coppia di dati la variazione additiva di 6 per l'immagine, corrispondente ad una variazione di 2 sui dati. Non hanno cura di verificare questa congettura su un'altra coppia di dati, poiché il modello affine è ammesso implicitamente. Tale verifica è dunque inutile.

Questa strategia basata sullo studio delle variazioni non interpreta la relazione fra dati e immagini in termini funzionali. L'uguaglianza delle differenze fra immagini corrispondente ad uno stesso scarto fra i dati è sufficiente per risolvere molto semplicemente il problema, come era stato indicato nell'analisi a priori. Lo studio teorico aveva sottolineato questo scoglio del quadro affine che consente procedure algoritmiche semplici o ragionamenti di proporzionalità che mascherano la pertinenza dello strumento funzione. La scoperta di altre funzioni, principalmente di secondo grado, potrà ulteriormente fare riemergere questa problematica.


RISPOSTA

Quando preme 9 e ☺ esce 37.

SPIEGAZIONE

Abbiamo ragionato così:

da 5 a 7 ci vuole 2 e da 25 a 31 ci vuole 6. Quindi, aggiungere 2 al numero digitato, corrisponde ad aggiungere 6 al numero apparso nella calcolatrice.

fig 8 : Sfruttamento del modello affine

Bibliographie

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.