Che cartello strano![1]

Groupe fonction

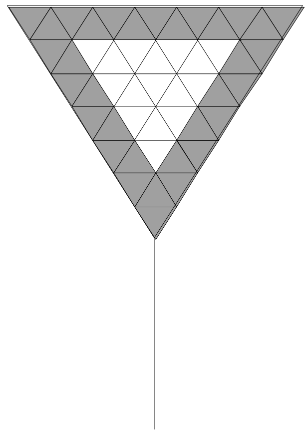
Parole chiave : Funzione, triangolo equilatero, equazione, trinomio di secondo grado, variazioni

Il problema

Questo problema propone lo studio di un triangolo equilatero composto da triangoli equilateri più piccoli. Si chiede se e' possibile costruire un triangolo che abbia la superficie del bordo uguale alla superficie dei triangolini che compongono il centro Ciò porta alla costruzione e allo studio di una tabella di valori o a quella della scomposizione di un trinomio di secondo grado con numeri irrazionali.

Che cartello strano!
Questo cartello triangolare «date la precedenza!» è formato da triangolini equilateri, tutti isometrici.
16 di questi formano un triangolo interno e gli altri 33 costituiscono il bordo esterno a tale triangolo.
È possibile fabbricare un altro pannello triangolare, di grandezza diversa ma per il quale il bordo, sempre della stessa larghezza, abbia lo stesso numero di triangolini del triangolo interno?

Spiegate la procedura che avete seguito e giustificate la vostra risposta.



Compito da risolvere e saperi mobilizzati

- Comprendere quello che si intende per «bordo» e «triangolo interno» verificando i dati: 16 e 33 triangolini.

- Disegnare altre figure e costatare, per tutte, che sul lato del triangolo interno ci sono sempre 3 triangolini di meno che su quello del triangolo grande esterno.

- Notare che il numero dei triangolini equilateri che formano un triangolo grande (la sua area prendendo un triangolino come unità) è uguale al quadrato del numero *n* dei triangoli disposti su uno dei suoi lati (somma dei numeri dispari da 1 a *n*).

- Rappresentare questi dati per differenti valori di *n* in una tabella*,* per esempio:

misura n del lato del triangolo interno:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
misura del lato del triangolo esterno:	4	5	6	7	8	9	10	11	12
area $(n+3)^2$ del triangolo grande:	16	25	36	49	64	81	100	121	144
area n^2 del triangolo interno (I):	1	4	9	16	25	36	**49**	64	81
area $(n+3)^2 - n^2$ del bordo (B):	15	21	27	33	39	45	**51**	57	63
differenza B – I:	14	17	18	17	14	9	2	-7	-21

- L’osservazione dell'ultima riga (B-I) porta alla conclusione che si impone: non esiste un valore di *n* che permette d’ottenere un cartello con un numero di triangoli sul bordo pari a quello dell'interno. E' possibile per un triangolo interno di lato 7 che I e B sono il più vicino possibile (49 e 51). Per i numeri successivi, è I che supera (funzione «elevare al quadrato») B (funzione «moltiplicare per 6 e aggiungere 9»).

[1] Problème 14 de l'épreuve I du 13e rallye, de catégories 7,8,9.

- Oppure: con un ragionamento algebrico, mostrare che, se le aree I e B fossero uguali, per il fatto che le aree dei due triangoli espresse in unità triangolini corrispondono a quadrati, si otterrebbe l'equazione $(n+3)^2 - n^2 = n^2$, da cui $(n+3)/n = \sqrt{2}$. Si evidenzierà la contraddizione poiché $\sqrt{2}$ è irrazionale mentre n è un intero. Questo ragionamento permette d'affermare che non ci sono soluzioni, anche per bordi più ampi.

- Oppure: con uno studio di funzione per il livello 10 il problema è risolvibile facilmente: ciò consiste nello studiare le variazioni di $(n+3)^2 - 2n^2$, ed eventualmente studiare le radici di questa funzione trinomia che si scrive $-n^2 + 6n + 9$. La soluzione algebrica dà il valore positivo non intero $3(1+\sqrt{2})$, da cui la risposta negativa alla domanda posta.

Nell'ambito funzionale, questo problema conduce ad un esercizio classico di studio di un quadrato di un trinomio. Ma questo è possibile solo per il livello più elevato del RMT.

Resultati

Nel 2005, questo problema della prova I del 13° RMT è stato svolto da 484 classi, suddivise fra le categorie 7, 8 e 9. Sono stati attribuiti i seguenti punteggi:

Punteggi attribuiti	0	1	2	3	4	N classi	m
Categoria 7	192	40	6	5	4	247	0,34
Categoria 8	119	29	19	10	8	185	0,70
Categoria 9	48	4	0	0	0	52	0,08
Totale (in %)	75%	15%	5%	3%	2%	484	

Seondo i criteri determinati dall'analisi a priori:

4 Risposta corretta (impossibile) con giustificazione del tipo sopra descritta o diversa, rigorosa e dettagliata
3 Risposta corretta data per congettura sulla base di più di due esempi significativi di cartelli, senza errori di calcolo oppure risposta corretta con giustificazione completa ma con un errore di calcolo
2 Risposta corretta data per congettura sulla base di uno o due esempi di cartelli, senza errori di calcolo
1 Errori nel calcolo dei triangolini che portano ad affermare che è possibile costruire almeno un pannello diverso da quello dato
oppure risposta corretta senza spiegazioni
oppure inizio corretto di ricerca
0 Incomprensione del problema

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Questo problema è posto in un registro geometrico e la sua utilizzazione mette in evidenza che le variazioni relative dei due insiemi di triangoli è stata una difficoltà non superata per molti degli allievi che non sono ricorsi all'uso di un'incognita.

Per i 3/4 delle classi non è stato possibile dare neppure un inizio di soluzione coerente, per i motivi che saranno analizzati di seguito. Per le categorie 7 e 8, questo problema è risultato troppo difficile. Gli strumenti necessari per una risoluzione completa non compaiono che in categoria 10.

A livello 9, si trovano delle messe in equazione corrette che portano ad un'equazione trinomia. La risoluzione è, allora, data per tentativi o con ricerche numeriche organizzate, come nell'elaborato seguente (figura 1) dove un errore di calcolo non ha permesso di concludere.

Il ragionamento aritmetico è stato osservato in un elaborato del livello 9 (figura 2).

$$(n+3)^2 - n^2 = n^2$$
$$n^2 + 6n + 9 - n^2 = n^2$$
$$6n + 9 = n^2$$
$$0 = n^2(-6n+9)$$

n	operation	resultat
1	$1^2(-6\times1+9)$	3
2	$2^2(-6\times2+9)$	-12
3	$3^2(-6\times3+9)$	-81
4	$4^2(-6\times4+9)$	-240
5	$5^2(-6\times5+9)$	-525
6	$6^2(-6\times6+9)$	-972
7	$7^2(-6\times7+9)$	-1617
8	$8^2(-6\times8+9)$	-2496

fig 1 : Messe in equazione corrette

Donc pour passer de la partie intérieure à la bordure extérieure, 3 petits triangles ont été ajoutés.

Donc: N = nombre de triangles sur la bordure extérieure.
N^2 = nombre total de triangles.
$N-3$ = nombre de triangles sur la bordure intérieure
$(N-3)^2$ = nombre total de triangle blancs
$N^2-(N-3)^2$ = nombre de triangle sur la bordure

Donc :

$$N^2-(N-3)^2 = (N-3)^2$$
$$N^2-(N^2-6N+9) = N^2-6N+9$$
$$N^2 = 2(N-3)^2$$
$$N = \sqrt{2(N-3)^2}$$
$$N = \sqrt{2}\times(N-3)$$

Or, si on ne peut multiplier un nombre par la racine de 2, car elle est irrationnelle. On ne peut donc pas construire un panneau triangulaire d'une taille différente.

fig 2 : Ragionamento aritmetico

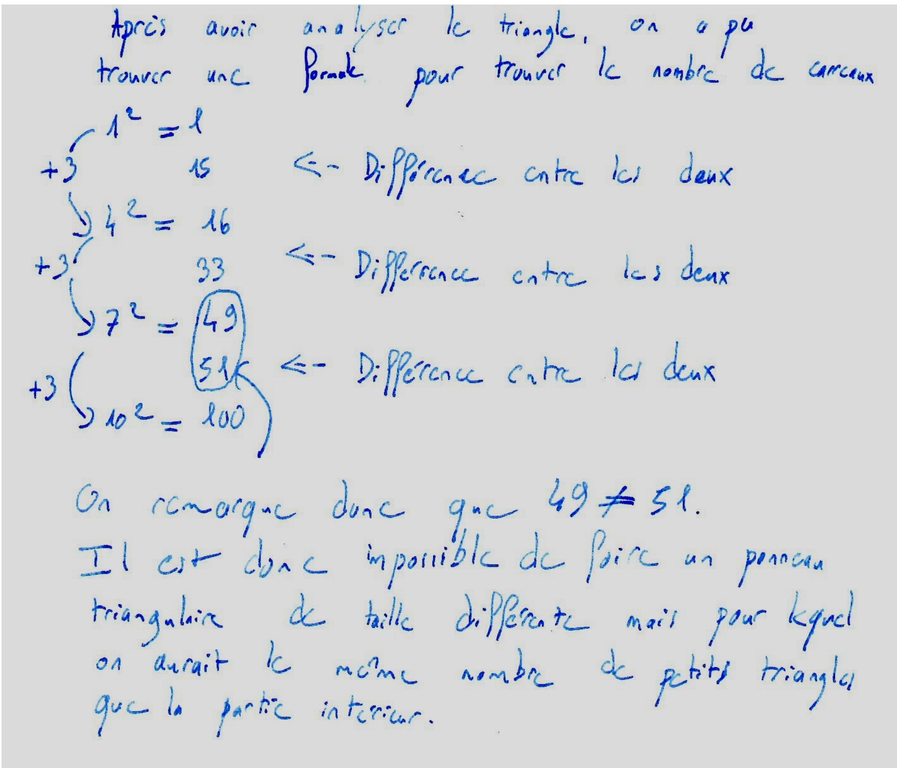
A livello 10, le variazioni del numero dei triangolini al centro e sul bordo permettono di giungere ad una conclusione (figura 3). Questo elaborato (figura 4) dimostra che un simile ragionamento può portare ad una buona risposta.

Au départ il y a 16 triangles au milieu et 33 pour la bordure puis 51 à l'intérieur et 49 à la bordure puis 69 en bordure et 100 à l'intérieur.
Le moment où s'approche le plus est le 2e puis par la suite on s'en éloigne de plus en plus donc c'est impossible.

fig 3 : Studio dei variazioni del numero dei triangolini al centro e sul bordo

Indicazioni didattiche

Durante un'attività in classe, per condurre gli allievi ad osservare le variazioni dei due insiemi di triangoli, si può dare una serie di cartelli di differenti misure sui quali gli allievi sono invitati a disegnare i bordi e contare i triangolini, come in esempio della fugura 4.


Après avoir analyser le triangle, on a pu trouver une formule pour trouver le nombre de carreaux

$1^2 = 1$
+3 15 <- Différence entre les deux
$4^2 = 16$
+3 33 <- Différence entre les deux
$7^2 = 49$
51 <- Différence entre les deux
+3 $10^2 = 100$

On remarque donc que $49 \neq 51$.
Il est donc impossible de faire un panneau triangulaire de taille différente mais pour lequel on aurait le même nombre de petits triangles que la partie intérieur.

fig 4: Buona risposta.

Ciò dà buoni disegni ma non porta gli allievi a cambiare spontaneamente di registro per una interpretazione

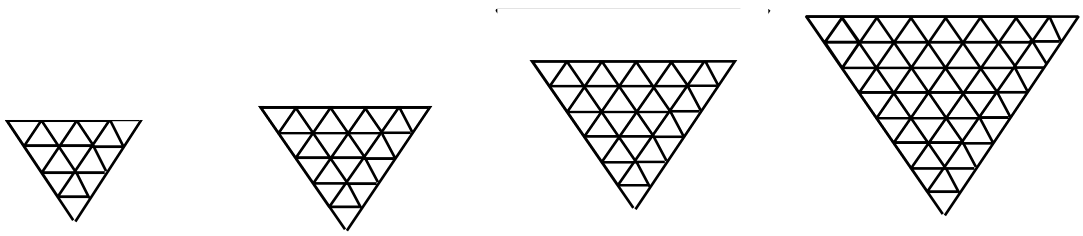
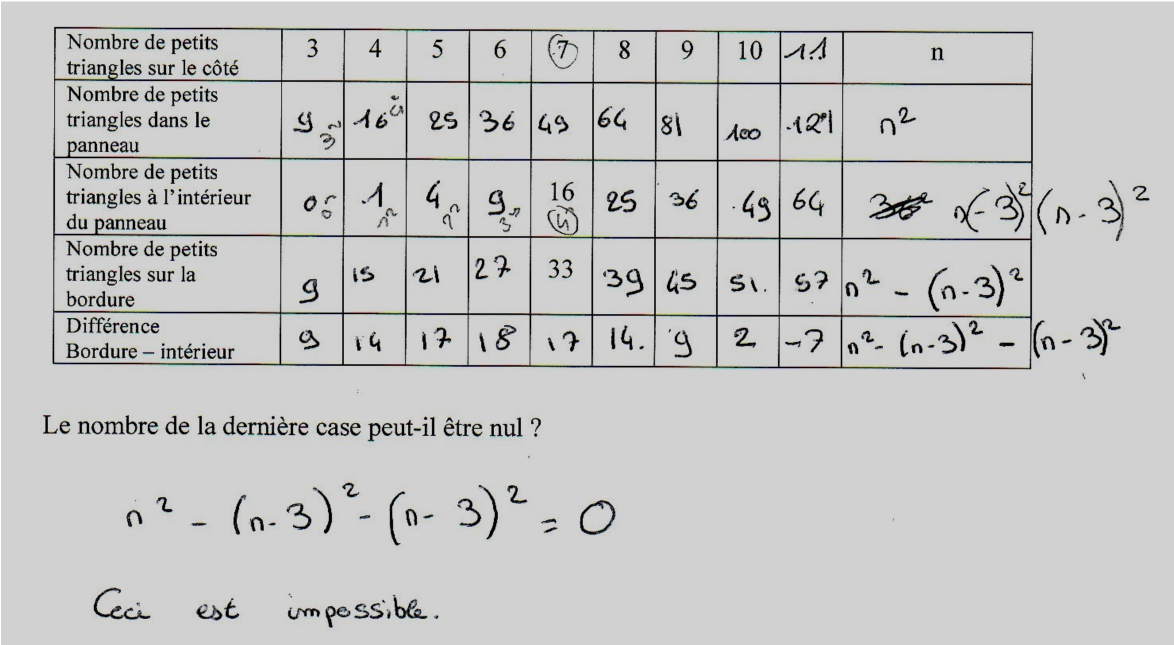


fig 5 : Per osservare le variazioni

Si può anche dare una tabella di valori da completare come quella seguente, con la domanda: "Il numero dell'ultima casella può essere zero?"

Numero n di triangolini sul lato	3	4	5	6	7	8	9	10	…	n
Numero di triangolini nel cartello					49					
Numero di triangolini all'interno del cartello					16					
Numero di triangolini sul bordo					33					
Differenza Bordo – interno										

La maggior parte degli allievi che hanno ricevuto la tabella la completano correttamente fino all'ultima colonna che permette loro di individuare l'equazione risolutiva (figura 6).



Nombre de petits triangles sur le côté	3	4	5	6	7	8	9	10	11	n
Nombre de petits triangles dans le panneau	9	16	25	36	49	64	81	100	121	n^2
Nombre de petits triangles à l'intérieur du panneau	0	1	4	9	16	25	36	49	64	$\cancel{36}$ $x(-3)^2$ $(n-3)^2$
Nombre de petits triangles sur la bordure	9	15	21	27	33	39	45	51	57	$n^2-(n-3)^2$
Différence Bordure – intérieur	9	14	17	18	17	14	9	2	-7	$n^2-(n-3)^2-(n-3)^2$

Le nombre de la dernière case peut-il être nul ?

$$n^2-(n-3)^2-(n-3)^2=0$$

Ceci est impossible.

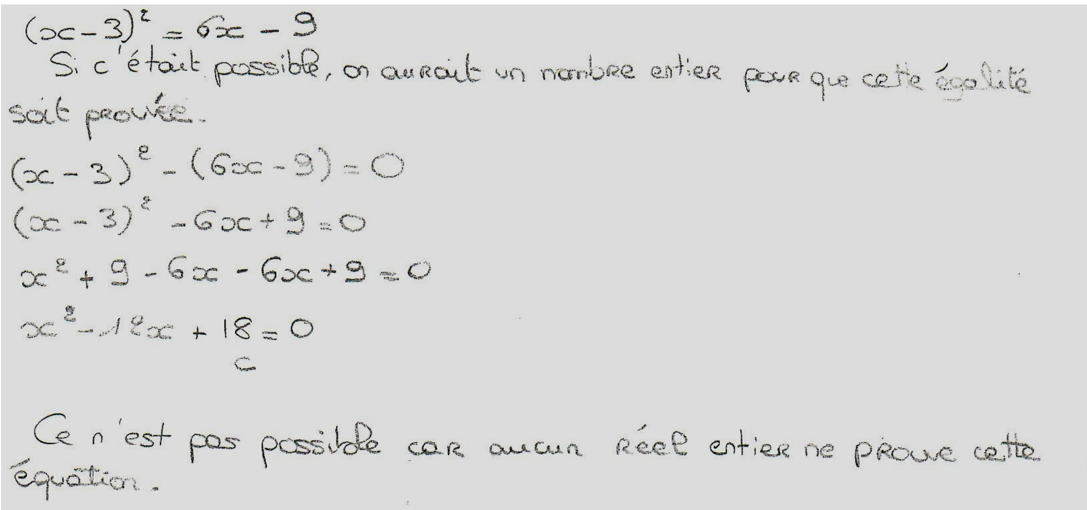
fig 6 : Tabella completana

L'ostacolo alla soluzione algebrica di questa equazione porta gli allievi a questa soluzione corretta ma non giustificata. Gli allievi a questo livello ritengono che solo le equazioni di primo grado possano essere risolte formalmente.

Per andare più lontano

Questo problema è stato somministrato a Besançon nel 2009-2010 in 4 classi di livello 9 e 3 classi di livello 10, nel quadro di una sperimentazione in situazione reale del Rally, con le organizzazione didattiche riportate qui sotto. Fra le copie degli elaborati raccolte, alcune portano alle seguenti osservazioni.

- La chiave di questo problema risiede in un cambiamento di registro: si passa da una analisi fine del contesto geometrico alla messa in equazione a partire dalla scelta di una variabile intera. Il calcolo algebrico corretto che conduce alla risoluzione di un'equazione di secondo grado di cui si cercano le eventuali soluzioni intere. Ai livelli 9 e 10, gli allievi non hanno gli strumenti per questo tipo di risoluzione e devono accontentarsi di arrivare alla semplice affermazione (figura 7).



$(x-3)^2=6x-9$

Si c'était possible, on aurait un nombre entier pour que cette égalité soit prouvée.

$(x-3)^2-(6x-9)=0$

$(x-3)^2-6x+9=0$

$x^2+9-6x-6x+9=0$

$x^2-12x+18=0$

Ce n'est pas possible car aucun réel entier ne prouve cette équation.

fig 7 : Affermazione

- Scrivendo queste formule, gli allievi lavorano nell'ambito delle funzioni, ma in modo implicito, restando nel registro algebrico, senza che la nozione di funzione sia esplicitata, salvo in qualche elaborato come il seguente (figura 8) che è di livello 10. Ma questa nozione è troppo nuova per essere operativa.

- Certi contesti portano ad un livello intuitivo molto vago che si situano nell'implicito e che non vengono tradotti in una relazione funzionale. Si tratta, allora, di far passare gli allievi dall'*idea* di funzione alla *nozione* più esplicita di funzione come strumento di risoluzione del problema. Questo obiettivo suppone, dunque, che si debba considerare una relazione fra variabili che sia generale, che sia alla portata degli allievi e che abbia senso in rapporto al contesto del problema. L'introduzione esplicita di grandezze variabili dovrebbe permettere di rendere indispensabile la formulazione di una legge che modellizza la situazione per raggiungere il livello di nozione desiderato.

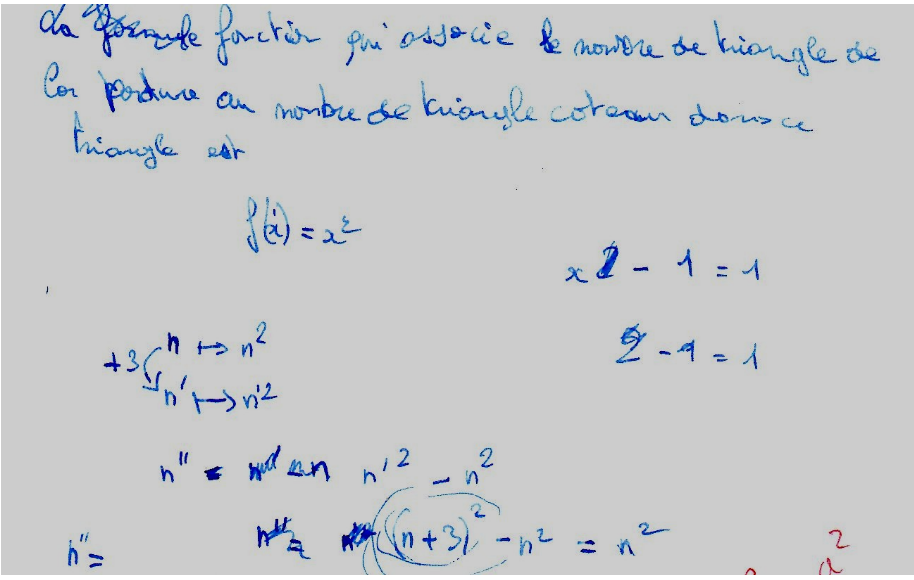


fig 8 : Fonction explicitée

- Esistono diversi strumenti per la rappresentazione di una soluzione che si situano nel registro funzionale: tabelle, rappresentazioni grafiche, leggi o formule, trattazioni algebriche… ma questo tipo di risoluzioni non sollecitano lo stesso grado di astrazione e si ordinano gerarchicamente in base alla complessità e al grado di astrazione necessaria a ciascuno. La coppia oggetto-immagine rivela un'astrazione elevata e non è spontanea. Si tratterà, dunque, di riflettere sulla relazione di questa coppia nei problemi proposti.

Bibliografia

Henry, M. Le concept de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 6, Parma 2006. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Daniela Medici, M. Gabriella Rinaldi, ARMT, 2007, p. 151-168.

Krysinska, M. & Schneider, M. *Émergence de modèles fonctionnels,* les éditions de l'Université de Liège, col. Si les mathématiques m'étaient contées, 2010.