Il prato di zio Francesco (II)[1]

Grupo funzione

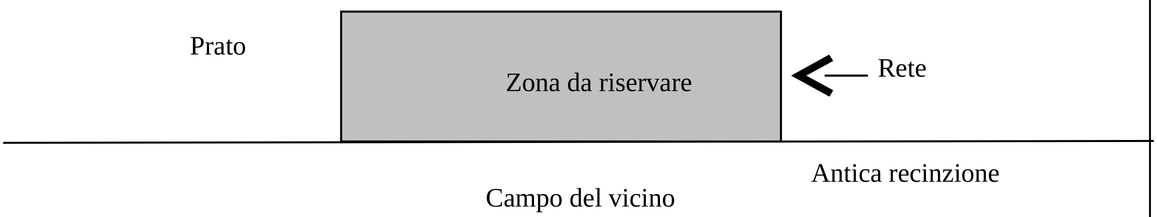
Parole chiave : Variabile, funzione, equazione, grafico cartesiano, approssimazione di misure, numeri reali.

Il problema

Questo problema propone trovare le dimensioni di un rettangolo di 40 m^2 e di 20 m di perimetro parziale, composto da tre lati, che nel contesto é un recinto circondato da una rete (equazione di secondo grado con radici irrazionali che possono essere approssimate).

Il prato di zio Francesco
Zio Francesco possiede un prato che confina con il campo di un vicino; un'antica recinzione rettilinea separa le due proprietà. Per sperimentare una nuova semina, zio Francesco vuole riservare nel suo prato una zona rettangolare di 40 m^2 confinante con la proprietà del vicino.

Per evitare che i suoi animali, che si spostano liberamente per il prato, vadano a calpestare la nuova piantagione, vuole sistemare una rete metallica che formi gli altri tre lati della zona rettangolare da riservare. Egli dispone di una rete lunga 20 m che vuole utilizzare tutta (vedere la figura).



Quali saranno, approssimate al decimetro, le misure dei lati della zona rettangolare da riservare?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.

Compito da risolvere e saperi mobilizzati

Si tratta anzitutto di appropriarsi della situazione e di riconoscere che i lati del recinto possono variare mentre restano costanti l'area del rettangolo e la lunghezza della recinzione.

Quindi occorre tradurre in equazioni le relazioni tra le variabili. Ad esempio, se si indica con x la lunghezza del lato del rettangolo parallelo alla vecchia recinzione (base) e con y quello perpendicolare (altezza), si ottengono le equazioni: $xy = 40$ e $x + 2y = 20$.

A questo punto, si aprono diversi percorsi.

1) Operare per tentativi, eventualmente aiutandosi con una tabella. I tentativi possono essere effettuati fissando il valore di una variabile, ricavando quello dell'altra variabile da una delle due equazioni e utilizzando la seconda relazione per controllo. Oppure, in alternativa, si possono far variare contemporaneamente i valori di x e y nelle due formule.

2) Riconoscere l'insieme delle due equazioni come un sistema, nel senso che le soluzioni da trovare per x e y devono essere valide per entrambe le equazioni scritte. Per risolverlo,

[1] Problème 19 de l'épreuve II du 18e rallye, de catégories 9,10.

sostituire una variabile con una funzione dell'altra per ottenere un'equazione in una incognita; per esempio sostituire nella seconda equazione y con $40/x$, ed ottenere l'equazione di secondo grado: $x^2 - 20x + 80 = 0$.

La risoluzione di questa equazione può avvenire mediante la formula risolutiva (solo per la cat.10) o per approssimazioni successive. In questo caso è possibile considerare la funzione $y = x^2 - 20x + 80$ ed assegnare valori alla variabile x in modo da trovare due valori di y di segno opposto. La ricerca può essere fatta in un primo tempo con valori interi di x e poi raffinata con la suddivisione in decimi degli intervalli trovati.

3) A partire dalle due relazioni $xy = 40$ e $x + 2y = 20$, tracciare i grafici delle curve corrispondenti, individuarne i due punti di intersezione e interpretare le loro coordinate nel contesto del problema. Un'altra possibile risoluzione grafica consiste nel tracciare il grafico della parabola $y = x^2 - 20x + 80$ ed individuarne le intersezioni con l'asse delle ascisse. Una volta trovate le due soluzioni del problema, occorre presentarle con l'approssimazione richiesta.

Resultati

Il problema è stato assegnato a 142 classi della categoria 9 e 108 della categoria 10

Si riportano i risultati nella seguente tabella:

Punteggi attribuiti	0	1	2	3	4	*N. classi*	*m*
Categoria 9	74	13	10	2	1	142	0,42
Categoria 10	60	13	8	7	11	108	0,96
Totale	68	13	9	4	5	250	0,66

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

4 Le due coppie di soluzioni (5,5 m e due volte 7,3 m oppure 14,5 m e due volte 2,8 m), con spiegazione chiara per ottenere l'equazione e una presentazione del procedimento di approssimazione, oppure la risoluzione per radicali

3 Le due coppie di soluzioni, con spiegazione chiara per ottenere l'equazione senza esplicitazione del metodo di risoluzione
oppure un risultato ottenuto per tentativi non organizzati

2 Una sola coppia di soluzioni con spiegazioni coerenti sulla maniera di trovarle

1 Procedimento coerente per interpretare i dati dell'enunciato e arrivare ad un'equazione, senza la sua risoluzione

0 Incomprensione del problema oppure non rispetto di una condizione

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Preliminarmente si segnala la presenza di un ostacolo nell'interpretazione della figura. Da essa vengono erroneamente dedotte informazioni supplementari, ad esempio che la base debba essere maggiore dell'altezza (con conseguente unica soluzione del problema) oppure che vi sia un rapporto fra i lati che si debba riconoscere attraverso una misura diretta. È possibile che l'enfasi attribuita alla figura dal testo del problema ("vedere la figura" ripetuto due volte) sia correlata a questa interpretazione. Un'altra possibile ambiguità del testo è rappresentata dalla richiesta "Spiegate come avete trovato la vostra risposta" che può far pensare ad una soluzione unica.

Le procedure più utilizzate sono la ricerca per tentativi (cat.9) e la risoluzione dell'equazione di secondo grado (cat.10) mediante la formula risolutiva.

Nel primo caso (procedura per tentativi) si nota la difficoltà di organizzare tentativi con numeri decimali e di descrivere i tentativi fatti, che spesso restano impliciti. Inoltre la ricerca viene arrestata al primo tentativo favorevole, perdendo così una delle due soluzioni del problema.

Nel secondo caso (equazione) si evidenziano difficoltà di natura algebrica, legate alla risoluzione dell'equazione di secondo grado.

In entrambi i casi, ma soprattutto nella risoluzione algebrica in cui le soluzioni dell'equazione vengono scritte in forma simbolica mediante radicali, emerge il problema di che cosa significhi l'approssimazione al decimetro richiesta.

Come già detto, tra le procedure errate si segnala la deduzione dalla figura di un rapporto fra i lati (esempio 1:3 oppure 1:4), dato che viene utilizzato al posto di uno di quelli del problema.

In diversi elaborati si osserva l'ipotesi implicita (dedotta dalla figura) che la base debba essere maggiore dell'altezza, limitazione che porta a non considerare o ad escludere una delle due soluzioni del problema.

Indicazioni didattiche

Nel contesto della gara, il problema ha ottenuto una bassissima percentuale di successi (soprattutto in cat.9). In effetti questo problema, oltre alla capacità di matematizzare la situazione attraverso la scrittura di un sistema e a quella di determinare le soluzioni dell'equazione risolvente in modo algebrico o grafico, richiede altre capacità, come quella di comprendere la situazione senza farsi condizionare dalla figura proposta e quella di riconoscere come numeri irrazionali le due coppie di soluzioni ed eventualmente di approssimarle.

La ricchezza del problema tuttavia costituisce una risorsa per l'insegnante che lo può utilizzare in diversi momenti del percorso scolastico e con diverse finalità. In funzione di tali obiettivi, l'insegnante può anche integrare o parzialmente modificare le richieste del problema, tra le quali quelle per risolvere le segnalate ambiguità del testo originale.

Si propongono alcuni esempi:

- Scelta delle variabili e confronto fra le equazioni ottenute. Il problema può inserirsi in un percorso di avvio alla risoluzione di problemi algebrici. Esso costituisce un esempio di situazione in cui la scrittura dell'equazione risolvente passa attraverso l'impostazione di un sistema e dipende dalla scelta delle variabili (si ottengono equazioni simili ma diverse se x e y indicano rispettivamente la base e l'altezza del rettangolo o vice versa).

- Introduzione delle equazioni di secondo grado: il problema può essere utilizzato per far nascere l'esigenza di un metodo rapido ed efficace per la risoluzione di tali equazioni contrapposto ad una lunga e non sempre affidabile ricerca per tentativi. A questo scopo il problema può essere lasciato sostanzialmente nella sua forma originale.

- Rappresentazione di funzioni: il problema può essere utilizzato per dare esempi di funzioni nate da una situazione geometrica e per sottolineare il rapporto di dipendenza fra le variabili. A tal fine potrebbe essere aggiunta la richiesta esplicita di una rappresentazione (in forma di tabella o di grafico) della funzione. In mancanza di tale richiesta si è osservato, infatti, che il ricorso allo strumento funzione (in particolare nel suo registro grafico) non è spontaneo. Al problema si possono associare vari tipi di grafici (iperbole e retta o parabola, con piccole variazioni anche in relazione alla scelta delle variabili). Uno strumento come Geogebra può essere utilizzato per sollevare lo studente dagli aspetti tecnici della costruzione del grafico e focalizzare l'attenzione sull'interpretazione del grafico stesso. Un confronto fra i grafici delle figure 1 e 2 porta ad una riflessione sulle soluzioni del problema. Il grafico della figura 1 fornisce i due valori delle incognite x e y, mentre quello della figura 2 fornisce solo i valori di x, mentre quelli di y devono essere ricavati dalla relazione utilizzata per la sostituzione.

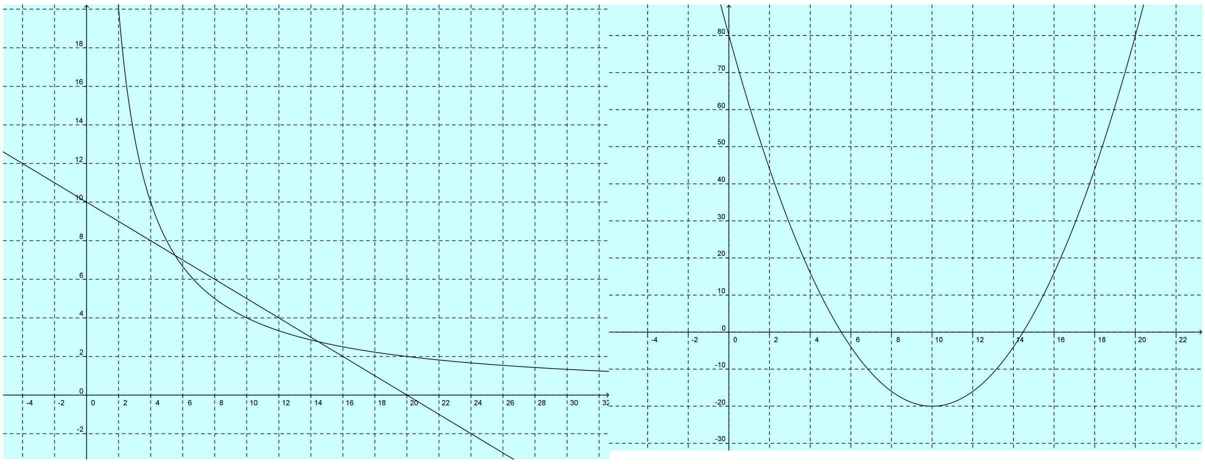


fig 1&2.

Approssimazione: il problema può essere utilizzato per una riflessione sulla natura dei numeri che lo risolvono. Si tratta infatti di numeri irrazionali, che possono essere scritti in forma simbolica mediante radici quadrate ma che nella situazione reale (in cui sia previsto ad esempio l'acquisto della recinzione) è necessario approssimare. Una possibile variabile didattica del problema può essere il grado di approssimazione richiesta. Si sottolinea che, rappresentando le funzioni con un software come Geogebra, la comprensione del concetto di numero irrazionale può essere favorita grazie all'esplorazione del grafico mediante lo strumento "zoom": il numero irrazionale, che inizialmente sembra "a portata di mano", nei successivi ingrandimenti diventa sempre più "sfuggente" mentre aumentano le cifre decimali dei numeri che lo racchiudono. Nella figura 3 è rappresentata una delle soluzioni del problema.

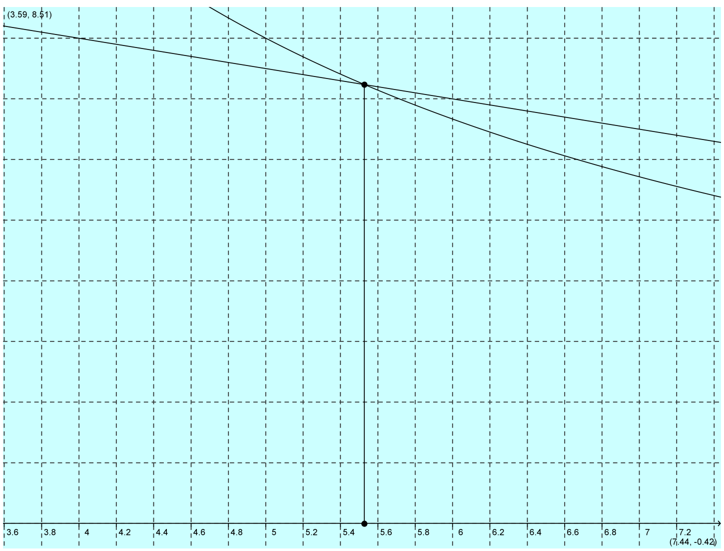


fig 3.

Per andare più lontano

Si presentano alcuni elaborati che mettono in evidenza le procedure, gli ostacoli e gli errori elencati nella rubrica *Procedure, ostacoli ed errori rilevati*.

Procedura di risoluzione per tentativi: fornisce una sola delle due soluzioni, con la corretta approssimazione (figure 4a, 4b, 5).

L'equazione quindi era : $\left(\frac{20-x}{2}\right)\cdot x = 40$

$$\left(10-\frac{1}{2}x\right)\cdot x = 40$$

$$10x-\frac{1}{2}x^2 = 40$$

$$\frac{20x-x^2}{2} = \frac{80}{2}$$

$$20x-x^2 = 80$$

PROSEGUE DI LÀ →

DA $20x-x^2=80$ abbiamo provato a dare un valore approssimativo alla $x = 5,5$. Trovato questo valore abbiamo trovato l'altro valore del lato : $\left(\frac{20-x}{2}\right) = \frac{(20-5,5)}{2} = 14,5 : 2 = 7,25$

Quindi il valore dei due lati approssimati al decimetro saranno uno 5,5 cm e l'altro 7,2 cm .

fig 4a & 4b

$1\times2+18 = 18\,m^2$
$2\times2+16 = 32\,m^2$
$3\times2+14 = 42\,m^2$
$4\times2+12$
$5\times2+10$
$6\times2+8$
$7\times2+6$
$8\times2+4$
$9\times2+2$

Nous avons travailler sur le tableur et nous avons trouvé que y doit faire approximativement entre 2,76 et 2,77 et pour x = 14,48 et 14,46

Si $y = 2,76$ $A = 39,9648\ m^2$
Si $y = 2,77$ $A = 40,0542\ m^2$

fig 5.

- Mancata esplicitazione dei tentativi effettuati e confusione fra dimostrazione e verifica a posteriori (figura 6).

- Difficoltà di organizzare i tentativi: con numeri interi non si giunge alle soluzioni (figura 7).

- Procedura di risoluzione algebrica: conduce alle due soluzioni ma fa perdere il senso dell'approssimazione (figura 8).

La misura delle due basi è rispettivamente 2,77 m e 14,46 m
il risultato è stato trovato dopo vari tentativi e ~~con questi dati~~ abbiamo verificato che la somma di questi era circa 20 m e il prodotto era circa 40 m²

$(2,77 \cdot 2) + 14,46 = 20 m$
$2,77 \cdot 14,46 = 40,0542 m^2$

fig 6. Confusion entre démonstration et vérification a posteriori

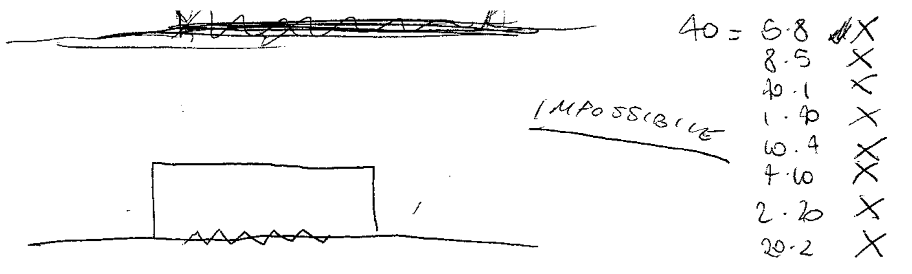
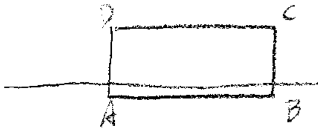


fig 7. Difficulté d'organiser les tentatives



$AD = BC = x$

$AB = CD = y$

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ x \cdot y = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 20 - 2x \\ (20 - 2x) \cdot x = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ 20x - 2x^2 = 40 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{—} \\ x^2 - 10x + 20 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 5 + \sqrt{5}$

$y_1 = 20 - 2 \cdot (5 + \sqrt{5}) = 20 - 10 - 2\sqrt{5} = 10 - 2\sqrt{5}$

$x_2 = 5 - \sqrt{5}$

$y_2 = 10 + 2\sqrt{5}$

$\Delta = 100 - 80 = 20 = 4 \cdot 5$

$x_{1,2} = \dfrac{10 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 5 \pm \sqrt{5}$

Le due soluzioni sono $\begin{cases} AD = 5 + \sqrt{5} \\ AB = 10 - 2\sqrt{5} \end{cases} \vee \begin{cases} AD = 5 - \sqrt{5} \\ AB = 10 + 2\sqrt{5} \end{cases}$

fig 8. Procédure de résolution algébrique

- Introduzione dell'ipotesi implicita che la base debba essere maggiore dell'altezza (figura 9)
- Introduzione di un rapporto fra i lati dedotto dalla figura (figura 10)

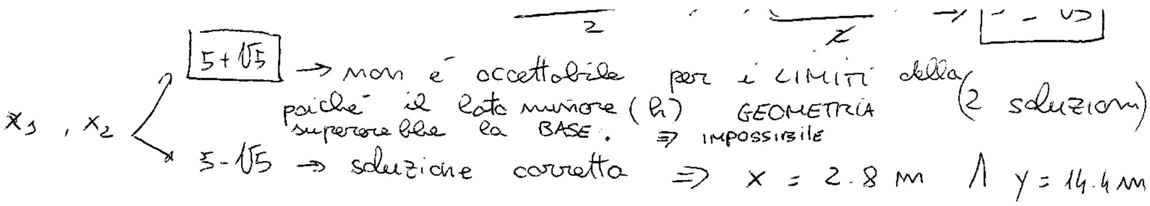


fig 9. Introduction d'une l'hypothèse implicite

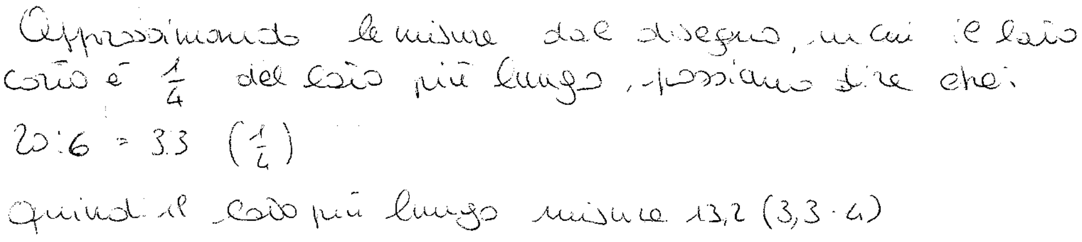


fig 10. Introduction du rapport des côtés

Bibliografia

Henry, M. & Rizza, A. Six questions sur la notion de fonction dans les problèmes du RMT, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 8, Brigue 2008. Eds. Lucia Grugnetti & François Jaquet, ARMT, 2009, p. 143-166.

Rizza, A. & Henry, M. Idea di funzione, *Actes des journées d'études sur le Rallye mathématique transalpin*, vol. 7, Bard (Valle d'Aosta) 2007. Eds. Lucia Grugnetti, François Jaquet, Gianna Bello, Rosanna Fassy, Graziella Telatin, ARMT, 2008, p. 181-198.

Henry, A., Henry M. & Rizza, A. Funzioni per risolvere problemi, La gazzetta di Transalpino, n.1, 2011, http://www.armtint.org/.