# Il ritorno de Mombo Tappeto[1]

Grupo funzione

**Parole chiave** : successione, quadrato, enumerazione, rapporto, equazione, disequazione

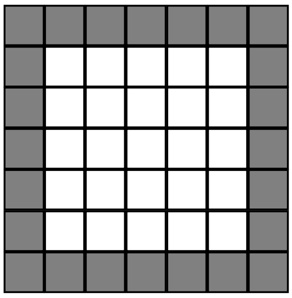
## Il problema

Confronto tra il numero di quadrati unità contenuti nel “bordo” di un quadrato grande e il numero di “quadrati unità interni” al quadrato grande, in una successione di quadrati i cui lati aumentano da 3 a 20 quadrati unità.

**Il ritorno de Mombo Tappeto**

Mombo Tappeto commercializza un nuovo modello di tappeti quadrati, costituiti da piccoli quadrati identici: grigi sul bordo e bianchi all'interno.

Ecco una rappresentazione di questo modello di tappeto, con sette quadrati su ogni lato.



Il tappeto più piccolo ha tre quadrati su ogni lato. Sono disponibili tappeti di questo modello con un massimo di venti quadrati su ogni lato.

Il signor Ronay desidera comprare un modello che abbia esattamente tanti quadrati grigi quanti bianchi.

La signora Gratin desidera comprare un tappeto un po' più chiaro, con più di due terzi di quadrati bianchi ma comunque meno di tre quarti di quadrati bianchi.

**È possibile accontentare la Signora Gratin? E il Signor Ronay?**

**In caso affermativo, indicate il o i modelli di tappeto che potrebbero accontentare ciascuno dei due clienti.**

**Spiegate le vostre risposte.**

## Compito da risolvere e saperi mobilizzati

- Immaginare i tappeti del tipo dato e disegnarne qualcuno tra i più semplici.

- Capire le relazioni aritmetiche tra il numero dei quadrati grigi, il numero dei quadrati bianchi e il numero di quadrati su un lato del tappeto. Per esempio (in linguaggio ordinario): il numero di quadrati grigi è quattro volte il numero di quadrati sul lato del tappeto, meno i quattro quadrati angolari che sarebbero contati due volte, il numero di quadrati bianchi è il numero di quadrati sul lato del tappeto, meno due, poi elevato al quadrato.

- Annotare i numeri dei quadrati di ogni tipo per alcuni tappeti, poi rendersi conto che è necessario compilare un inventario.

[1] Problème 16 de l'épreuve I du 19e rallye, de catégories 8,9,10.

- Tener conto delle richieste dei clienti e, di conseguenza, calcolare il rapporto « quadrati bianchi/numero totale » per trovare i modelli che li accontentano.

Un'analisi dei rapporti permette la presa di coscienza della loro crescita in funzione del numero di quadrati sul lato: essi diventano «sempre più chiari» perché la parte bianca centrale cresce più rapidamente del bordo scuro. Si può così arrivare ad un inventario di questo genere, che si limita ai modelli da prendere in considerazione :

| Quadrati per lato | quadrati grigi | quadrati bianchi | quadrati del tappeto | bianchi/ totale |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 8 (= 3 x 4 - 4) | 1 = $(3 - 2)^2$ | 9 = $3^2$ | 1/9 = 0,11… |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 6 | 20 (= 6 x 4) - 4) | 16 = $(6 - 2)^2$ | 36= $6^2$ | 16/36 = 4/9 = **0,44..** |
| 7 | 24 | 25 | 49 | 25/49 = **0,51..** |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| 10 | 36 | 64 | 100 | 0,64 |
| 11 | 40 | 81 | 121 | **0,669..** |
| 12 | 44 | 100 | 144 | **0,694..** |
| 13 | 48 | 121 | 169 | **0,715..** |
| 14 | 52 | 144 | 196 | **0,734..** |
| 15 | 56 | 169 | 225 | 0,751.. |
| 16 | 60 | 196 | 256 | 0,765.. |

- Dedurre dall'osservazione della crescita dei rapporti «numero di quadrati bianchi/numero totale di quadrati» che la richiesta del Sig. Ronay non potrà essere soddisfatta e che la Signora Gratin potrà scegliere tra i modelli da 11 a 14 quadrati di lato

## Resultati

Su 763 classi che hanno partecipato alla prima prova del 19° RMT, i punteggi attribuiti sono i seguenti

| *Punteggi attribuiti* | *0* | *1* | *2* | *3* | *4* | *Nb classes* | *m* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Categoria 8* | *239* | *121* | *113* | *42* | *23* | *538* | *1,05* |
| *Categoria 9* | *55* | *23* | *33* | *9* | *9* | *129* | *1,18* |
| *Categoria 10* | *38* | *17* | *23* | *9* | *9* | *96* | *1,31* |
| *Totale* | *332* | *161* | *169* | *60* | *41* | *763* | *1,10* |

secondo il modello seguente:

4 Risposta corretta (nessun tappeto per il Sig. Ronay, tappeti con 11, 12, 13 o 14 quadrati per lato per la Signora Gratin) con spiegazioni corrette

3 Risposta corretta per ogni cliente con spiegazioni parziali o poco chiare

2 Risposta corretta per un cliente con spiegazioni
oppure risposta corretta per i due clienti, ma senza spiegazioni

1 Calcoli soltanto a proposito di qualche tappeto

0 Incomprensione del problema.

## Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Nei protocolli abbiamo rilevato le seguenti procedure, dalla meno esperta a quella piu' esperta:

1) Tentativi poco organizzati, con o senza la verifica di tutti i vincoli

2) Utilizzo di disegni, ad esempio, in questa copia di livello 8 (figura 1).

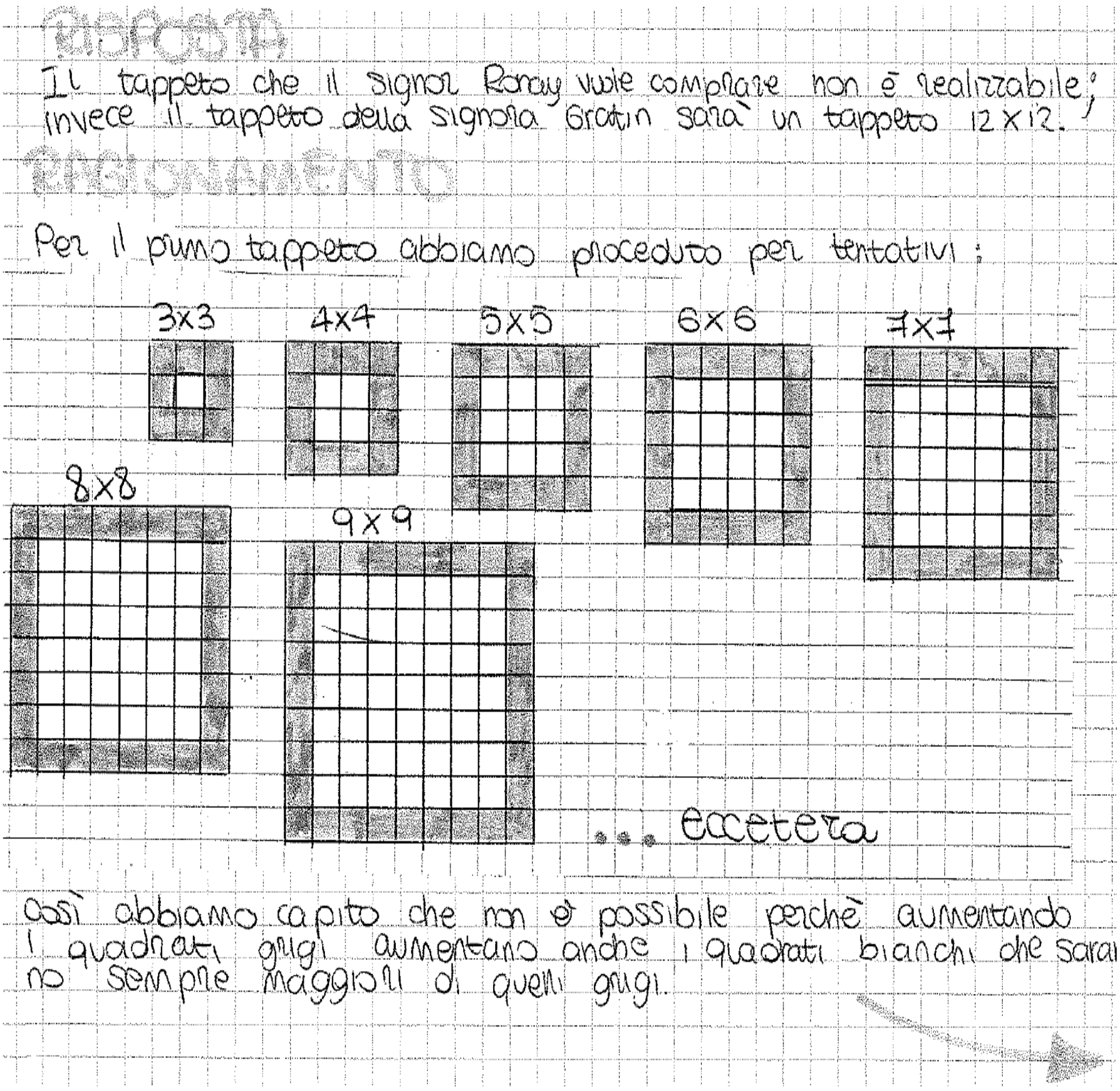



fig 1. Utilizzo di disegni (livello 8)

3) Tentativi esplicitamente organizzati, con verifica (figura 2)

4) abelle complete (da 3 a 20 quadrati per lato) o parziali (da 3 a 9, da 3 a 15, o da 8 a 15 quadrati per lato) (figure 3 e 4)

5) Messa in equazione e disequazione utilizzando la variabile n del numero di quadratini per lato. Ad esempio, in copia di livello 10 della figura 5, nella quale non si vede la loro risoluzione

6) Utilizzo della nozione di funzione. Poche copie utilizzano una notazione funzionale, che esprime “il numero di quadrati bianchi„ e “il numero di quadrati grigi„ in funzione del numero dei quadrati del lato. (figura 6).

Il signor Romay non può essere accontentato perché il numero dei quadrati bianchi è sempre diverso da quello dei quadrati grigi:

$20 \cdot 4 = 80 - 4 = 76$
$18 \cdot 18 = 324$

$19 \cdot 4 = 76 - 4 = 72$
$17 \cdot 17 = 289$

$18 \cdot 4 = 72 - 4 = 68$
$16 \cdot 16 = 256$

$17 \cdot 4 = 68 - 4 = 64$
$15 \cdot 15 = 225$

$16 \cdot 4 = 64 - 4 = 60$
$14 \cdot 14 = 196$

$15 \cdot 4 = 60 - 4 = 56$
$13 \cdot 13 = 169$

$14 \cdot 4 = 56 - 4 = 52$
$12 \cdot 12 = 144$

$13 \cdot 4 = 52 - 4 = 48$
$11 \cdot 11 = 121$

$12 \cdot 4 = 48 - 4 = 44$
$10 \cdot 10 = 100$

$11 \cdot 4 = 44 - 4 = 40$
$9 \cdot 9 = 81$

$10 \cdot 4 = 40 - 4 = 36$
$8 \cdot 8 = 64$

$9 \cdot 4 = 36 - 4 = 32$
$7 \cdot 7 = 49$

$8 \cdot 4 = 32 - 4 = 28$
$6 \cdot 6 = 36$

$7 \cdot 4 = 28 - 4 = 24$
$5 \cdot 5 = 25$

$6 \cdot 4 = 24 - 4 = 20$
$4 \cdot 4 = 16$

$5 \cdot 4 = 20 - 4 = 16$
$3 \cdot 3 = 9$

$4 \cdot 4 = 16 - 4 = 12$
$2 \cdot 2 = 4$

$3 \cdot 4 = 12 - 4 = 8$
$1 \cdot 1 = 1$

fig 2. Tentativi esplicitamente organizzati, con verifica (niveau 10)

Pour Madame Gratin:

| côté | aire totale | carrés blancs | carrés noirs | $\frac{2}{3}$ de l'aire totale | $\frac{3}{4}$ de l'aire totale |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | 64 | 36 | 28 | $42,\bar{6}$ | 48 |
| 9 | 81 | 49 | 32 | 54 | 60,7 |
| 10 | 100 | 64 | 36 | $66,\bar{6}$ | 75 |
| 11 | 121 | 81 | 40 | $80,\bar{6}$ | 90,75 |
| 12 | 144 | 100 | 44 | 96 | 108 |
| 13 | 169 | 121 | 48 | $112,\bar{6}$ | 126,75 |
| 14 | 196 | 144 | 52 | $130,\bar{6}$ | 147 |
| 15 | 225 | 169 | 56 | 150 | 168,75 |

Solutions

↳ doit être égal à plus que
et moins que

Les solutions pour Madame Gratin soit les tapis de côté de 11, 12, 13 ou 14 carrés.

fig 3. Copia di livello 9 per la signora Gratin

- È possibile accontentare il signor Roney? No.

Costruendo la seguente tabella, seguendo le caratteristiche richieste dal signor Roney, ovvero B = N, si nota:

| LATO DEL Q. | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| TOT Q. | 81 | 64 | 49 | 36 | 25 | 16 |
| QUADR. N. | 32 | 28 | 24 | 20 | 16 | 12 |
| QUADR. B. | 49 | 36 | 25 | 16 | 9 | 4 |

si nota che il totale dei quadrati neri e dei quadrati bianchi aumenta all'aumentare del lato, ma aumenta anche la loro differenza.

Il caso più vicino a B = N è nel quadrato 7x7, poiché i quadrati neri sono 24 e quelli bianchi 25, quindi non è possibile accontentare il signor Roney.

fig 4. Un esempio per il signor Ronay in una copia di livello 10

## 7) Osservazioni generali

La maggior parte delle produzioni dei ragazzi mostra un procedimento di tipo empirico, dei tipi 1) e 2) con delle prove più o meno organizzate su delle liste e/o disegni e arrivano ad una comprensione del problema, poiché il metodo empirico più seguito prevede di disegnare diversi modelli di tappeto. Per le risposte più elaborate, l'uso di una tabella mette in evidenza una procedura sistematica che consente di arrivare al risultato corretto..Nelle categorie superiori 9 e 10, si possono trovare esempi della procedure 4) ma, solo in tre rari casi, questa procedura algebrica è condotta in maniera adeguata e conduce ad una risposta argomentata.

Nella grande maggioranza dei casi si osserva che la risposta corretta che riguarda M. Ronay è data senza giustificazione, quando per rispondere alla domanda di Mme Gratin gli allievi fanno o tentano una verifica a posteriori. Un piccolissimo numero di copie utilizza implicitamente il cambio del segno della differenza "numero di quadrati grigi - numero di quadrati bianchi" posti tra 6 e 7 quadratini per lato, per rispondere che M. Ronay non può essere soddisfatto.

Ancora, pochissimi utilizzano l'incrocio del rapporto tra il numero di quadratini bianchi e il numero totale $n^2$ di quadratini.

Procedimento di risoluzione del problema:

I signor Ronay non e' accontentabile

$x$ = quadrati neri (per lato) → totale quadrati neri $= 4x-4$

$x-2$ = quadrati bianchi (per lato) → totale quadrati bianchi $=(x-2)^2$

Dunque per l'equazione $4x-4=(x-2)^2$

$4x-4=x^2-4x+4$

$-x^2+8x-8=0$

non ci sono soluzioni $\in \mathbb{N}$ (insieme dei numeri naturali

IMPOSSIBILE

La signora Gratin non e' accontentabile

$x$ = quadrati ~~bianchi~~ neri per lato

$x-2$ = quadrati bianchi per lato

Dunque per la disequazione $\frac{2}{3}x^2 < (x-2)^2 < \frac{3}{4}x^2$

IMPOSSIBILE poiché non esistono S $\in \mathbb{N}$

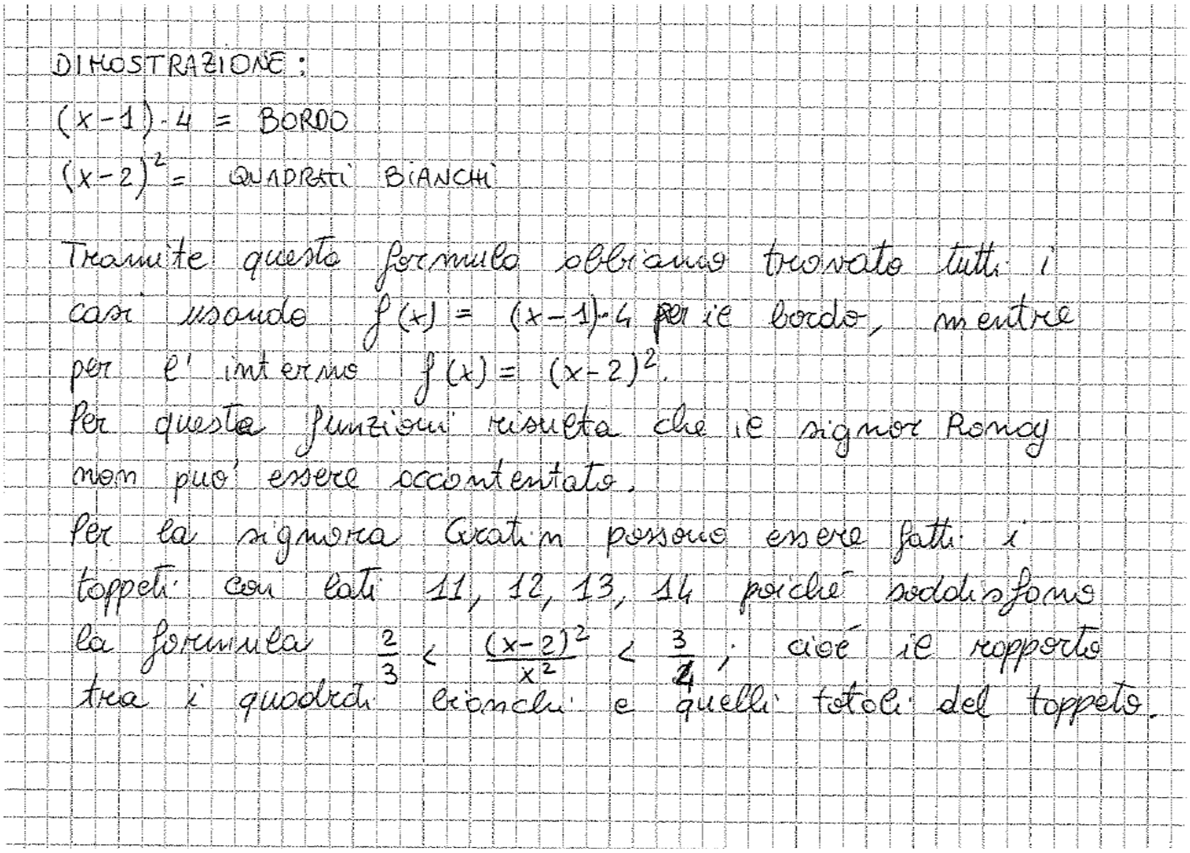
fig 5. Messa in equazione e disequazione (livello 10)

Anche senza tabella o con delle tabelle che non contengono le colonne che rappresentano le richieste di Mme Gratin, $2n^2/3$ e $3n^2/4$, si trovano delle copie in cui si calcolano tali rapporti per "verificare " che Mme Gratin sarà soddisfatta con dei tappeti di lato 11, 12, 13 0 14 quadrati.

Pochissimi alunni hanno introdotto la variabile indipendente n del numero di quadrati per lato per ottenere le funzioni che legano i numeri di quadrati grigi e il numero di quadrati bianchi al numero n. Inoltre, nelle tabelle contenenti le colonne " numero di quadrati per lato" e " numero di quadrati grigi", " numero di quadrati bianchi", " numero totale di quadrati" spesso la colonna di ciò che è più logico scegliere come "variabile" (numero di quadrati per lato) non è posta a sinistra della tabella.

Segnaliamo che in diverse posizioni le risposte 11 o 14 per il tappeto di Madame Gratin sono state scartate, a volte è stato dato un solo risultato (il 12).

È necessaria un'ultima osservazione riguardo all'enunciato: la domanda di Monsieur Ronay precede quella di Madame Gratin, quando l'ordine delle domande e' invertito. Ciò potrebbe aver disorientato alcuni alunni che hanno fatto la scelta di una soluzione di tipo algebrico e non riuscendo ad arrivare ad un risultato per M. Ronay, abbandonano.



DIMOSTRAZIONE:

$(x-1)\cdot 4$ = BORDO

$(x-2)^2$ = QUADRATI BIANCHI

Tramite queste formule abbiamo trovato tutti i casi usando $f(x) = (x-1)\cdot 4$ per il bordo, mentre per l'interno $f(x) = (x-2)^2$.
Per queste funzioni risulta che il signor Ronoy non può essere accontentato.
Per la signora Gratin possono essere fatti i toppeti con lati 11, 12, 13, 14 perché sodolisfano la formula $\frac{2}{3} < \frac{(x-2)^2}{x^2} < \frac{3}{4}$; cioè il rapporto tra i quadrati bianchi e quelli totali del toppeto.

fig 6. Utilizzo della nozione di funzione

## Indicazioni didattiche

Data la debole riuscita di questo problema constatata su 763 copie, è ragionevole consigliare di proporlo a degli allievi in una situazione di classe, con ricerche individuali, messa in comune degli "indizi", e seguendo il loro livello stimolarli a costruire delle tabelle oppure a mettere i dati in equazione.

La costruzione ragionata di una tabella ai livelli 8 e 9 può mettere in evidenza il ruolo della variabile n del numero di quadratini per lato, come dato di base per i calcoli dei numeri di quadratini grigi e bianchi. Questo lavoro può essere considerato come un primo approccio alla nozione di funzione.

Si può adottare una risoluzione algebrica. Questa conduce ad un'equazione e due disequazioni di secondo grado, la cui risoluzione nell'ambito dei numeri interi si può fare per tentativi e verifiche o con uno studio classico dei trinomi ottenuti.

## Per andare più lontano

Una risposta più colta può essere calcolare in funzione del numero n di quadratini per lato il numero totale di quadrati: $n^2$, il numero dei quadrati grigi: $4n-4$ e quello dei quadrati bianchi: $(n - 2)^2$. Per la domanda di Madame Gratin, si può calcolare il rapporto del numero di quadrati bianchi sul numero totale: $(n - 2)^2/ n^2$ e confrontarlo con 2/3 e 3/4, il che conduce alle disequazioni di secondo grado: $8n^2 < 12(n - 2)^2 < 9n^2$ che danno le soluzioni intere 11, 12, 13 o 14.

Per la domanda di M Ronay, si può risolvere l'equazione: numero di grigi = numero di bianchi, $(4n - 4) = (n - 2)^2$ che non ha soluzioni intere. Si ottiene dunque una situazione impossibile.

Si può anche considerare che il rapporto $[n / (n - 2)]^2$ dovrebbe essere uguale a 2, il che è impossibile poiché la sua radice quadrata è irrazionale.

## Bibliografia

Rinaldi, Maria Gabriella (1999). Bordi, *il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica?* Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino, Lucia Grugnetti & François Jaquet eds, Brigues 1997-1998, p. 62-66.

---