

Griglie

Identificazione

Rally: 25.I.06 ; categorie: 4, 5, 6
ambiti: FN, OPN ; famiglie: [DCP](#), [MUL](#), [SF](#),
Code: [op88-fr](#) ; statut: 2

Sunto

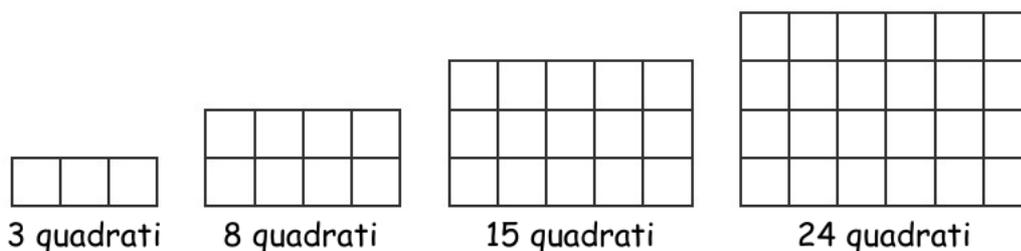
Compito matematico

In una successione di griglie di cui sono date le prime quattro (1×3 ; 2×4 ; 3×5 ; 4×6) con l'indicazione del corrispondente numero di quadretti, verificare se si possono costruire delle griglie di forma di 112 e 224.

Enunciato

Asmine disegna una serie di griglie rispettando la seguente regola: per ogni nuova griglia aggiunge una riga e una colonna di quadretti alla griglia precedente.

Queste sono le quattro griglie che ha già disegnato:



Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini?

E una di esattamente 224?

Spiegate come avete fatto a trovare la vostra risposta.

Compito per la risoluzione e saperi mobilizzati

Analisi del compito

- Osservare le griglie già disegnate e capire come funziona la regola di costruzione.
- Continuare a disegnare altre griglie, aggiungendo sempre una riga e una colonna, per vedere se si possono ottenere quelle con il numero di quadratini richiesto.
- Per ogni griglia determinare il numero di quadratini con una moltiplicazione o con un conteggio e osservare che non si può fare una griglia di 112 quadratini, mentre se ne può fare una di 224. Questa procedura è lunga e un po' noiosa, anche se non impossibile.

Oppure:

- osservare le regolarità che si ripetono da una griglia all'altra. Si può notare per esempio che la differenza dei numeri di quadratini tra la lunghezza e la larghezza è sempre di 2, ($3-1$; $4-2$; $5-3$; $6-4$;...), oppure che per passare da una griglia all'altra si aumenta di 1 sia l'altezza che la larghezza. A partire da questa osservazione, impostare una serie di moltiplicazioni in cui i due fattori differiscono di 2 e vedere se tra i risultati ottenuti

compaiono i numeri cercati: $7 \times 5 = 35$; $8 \times 6 = 48$; $9 \times 7 = 63$; $10 \times 8 = 80$; $11 \times 9 = 99$; $12 \times 10 = 120$; ... $16 \times 14 = 224$. Constatate che il numero 112 non compare, mentre compare il 224.

Oppure:

- Osservare che, a partire dalla prima griglia, il numero di quadretti delle griglie successive si ottiene aggiungendo 5, 7, 9, 11, quadretti al numero di quadretti della griglia precedente: $3 + 5 = 8$; $8 + 7 = 15$; $15 + 9 = 24$. Questi numeri (5, 7, 9, 11) sono la differenza tra il numero di quadretti di una griglia e il numero di quadretti della precedente. Costruire eventualmente altre griglie per verificare che questa differenza aumenta ogni volta di 2. Impostare quindi una serie di addizioni, partendo dall'ultimo numero di quadretti indicato negli esempi, a cui bisogna aggiungerne 11. Continuare così e verificare se tra i numeri ottenuti compaiono quelli richiesti: $24 + 11 = 35$; $35 + 13 = 48$; $48 + 15 = 63$; ... $80 + 19 = 99$; $99 + 21 = 120$; ... $195 + 29 = 224$.

Concludere che non è possibile costruire una griglia con 112 quadretti, ma che è possibile con 224 quadretti.

Parole chiave

Numero naturale, addizione, somma, moltiplicazione, prodotto, termine, successione, progressione, funzione di secondo grado, verifica

Risultati

Punteggi attribuiti su 3209 classi di 20 sezioni:

25.I.06							
Categoria	0	1	2	3	4	Num. classi	Media
Cat 4	331 (38%)	119 (14%)	102 (12%)	94 (11%)	230 (26%)	876	1.74
Cat 5	258 (28%)	109 (12%)	124 (13%)	115 (12%)	329 (35%)	935	2.16
Cat 6	387 (28%)	123 (9%)	192 (14%)	199 (14%)	497 (36%)	1398	2.21
Total	976 (30%)	351 (11%)	418 (13%)	408 (13%)	1056 (33%)	3209	2.07

Secondo i criteri dell'analisi a priori:

- 4 Risposte corrette (no 112, sì 224) con una spiegazione chiara e completa (rappresentazione di altre griglie, dettaglio di tutti i calcoli effettuati, osservazioni risolutive esplicitate, ...) che faccia capire la procedura adottata.
- 3 Risposte corrette con spiegazione incompleta o poco chiara (mancanza di qualche calcolo o di qualche passaggio, osservazioni risolutive abbozzate ma non esplicitate, ...)
- 2 Le due risposte corrette senza spiegazione
oppure una sola risposta corretta (per un errore di calcolo o di conteggio) con spiegazioni che facciano capire quale procedura si è seguita
- 1 Entrambe le risposte sbagliate per errori di calcolo, ma procedura impostata correttamente
- oppure una delle due risposte corretta e ben spiegata e l'altra errata per un errore di tipo concettuale (ad esempio, visto che la griglia di 112 quadretti non si può fare, si deduce che non sia possibile realizzare quella di 224 perché è il doppio)
- 0 Incomprensione del problema

Questo problema è una variante di 08-II-05 Griglie (A) con delle piccole modifiche. Le medie dei punteggi ottenuti, nelle stesse categorie, sono molto simili.

Procedure, ostacoli ed errori rilevati

Gli esempi seguenti in italiano delle categorie 4, 5 provengono dalla sezione di Parma mentre quelli della categoria 6 dalla sezione di Milano. Gli esempi di elaborati in francese della categoria 6 vengono dalla sezione di Franche-Comté.

Negli elaborati appaiono due tipi di procedure :

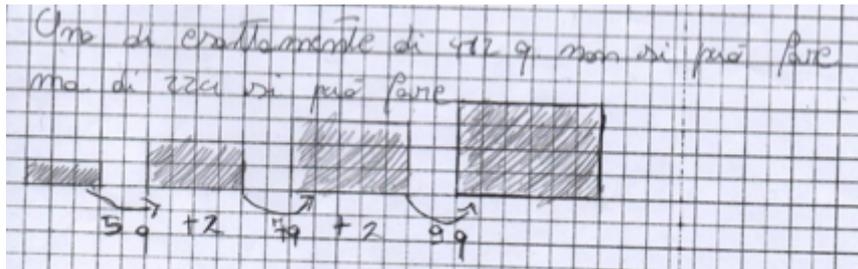
- Una procedura grafica con la rappresentazione di tutta la successione delle griglie fino a quella di 224 quadretti, disegnate separatamente oppure incasellate una dentro l'altra in un unico disegno
- La descrizione del passaggio da una griglia alla successiva mediante la successione numerica del numero di quadretti contati in larghezza, in lunghezza oppure in area.

Indicazioni didattiche

L'analisi dei protocolli ha evidenziato l'evoluzione del livello di competenza argomentativa degli alunni, rispetto al livello scolare.

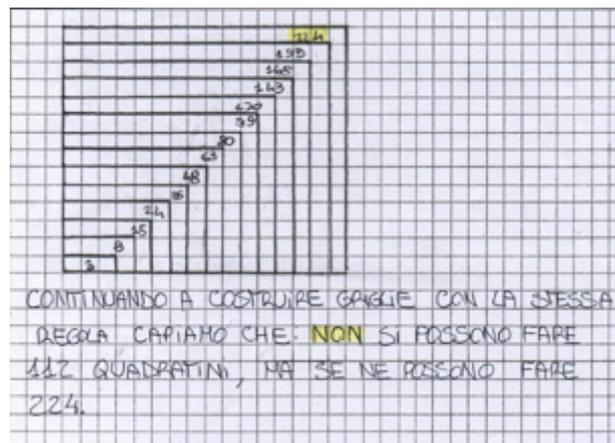
Le rappresentazioni che abbiamo trovato in tutte e tre le categorie riportano alcune griglie in sequenza staccate:

MI06051



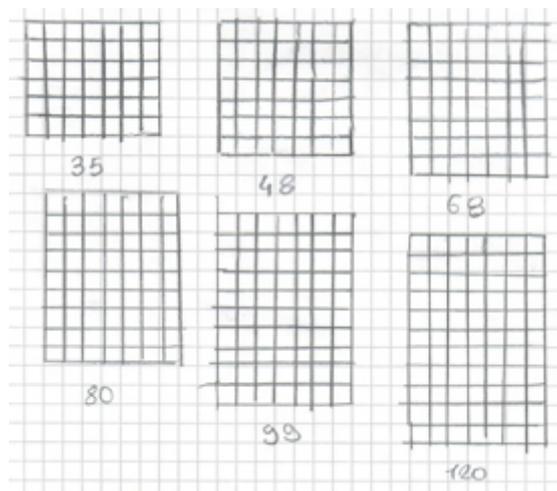
oppure incasellate l'una nell'altra:

MI06099



La seconda rappresentazione risulta più efficace ed economica in termini di spazio; inoltre c'è un minore rischio di errore:

PR4035



anche se il conteggio dei quadratini può introdurre qualche difficoltà:

RAGIONAMENTO: ABBIAMO RIDISEGNATO LE 4 GRIGLIE * POI CI SIAMO ACCORTI CHE TRA LE GRIGLIE C'È UN RAPPORTO TRA I NUMERI * POI ABBIAMO

~~E ADDE~~

FATTO DELLE OPERAZIONI FIN FINO AD ARRIVARE AL NUMERO

224: PER IL NUMERO 112

$$(3 \times 2) + 2 = 6 + 2$$

3 È IL NUMERO DELLE RIGHE

$$(9 \times 8) + 8 = 72 + 8 = 80$$

$$(10 \times 9) + 9 = 90 + 9 = 99$$

$$(11 \times 10) + 10 = 110 + 10 = 120$$

$$(12 \times 11) + 11 = 132 + 11 = 143$$

$$(13 \times 12) + 12 = 156 + 12 = 168$$

$$(14 \times 13) + 13 = 182 + 13 = 195$$

$$(15 \times 14) + 14 = 210 + 14 = 224 \text{ LO ABBIAMO TROVATO}$$

→

POI CI SIAMO RESI CONTO CHE IL NUMERO 112 LO ABBIAMO SUPERATO

MA IL NUMERO 224 L'ABBIAMO TROVATO

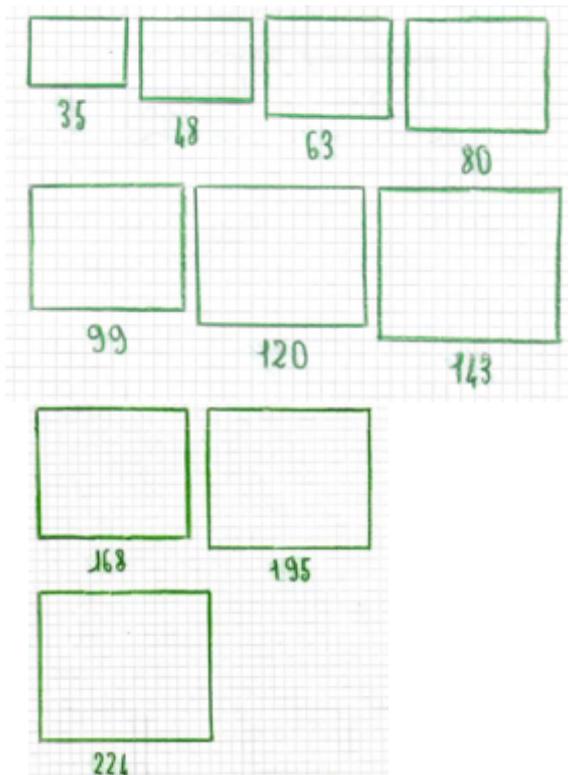
PR4027

$4 \times 6 = 24$ ABBIAMO LETTO IL PROBLEMA E
 $5 \times 7 = 35$ ABBIAMO CAPITO CHE DOVEVAMO AGGIUNGERE
 $6 \times 8 = 48$ UNA COLONNA E UNA RIGA, AL POSTO
 $7 \times 9 = 63$ DI CONTINUARE A FARE IL DISEGNO
 $8 \times 10 = 80$ ABBIAMO FATTO LE OPERAZIONI: $4 \times 6 = 24$
 $9 \times 11 = 99$ CHE ERA L'ULTIMA GRIGLIA CHE HATATTO ASSIEME,
 $10 \times 12 = 120$ $5 \times 7 = 35, 6 \times 8 = 48, 7 \times 9 = 63, 8 \times 10 = 80, 9 \times 11 =$
 $11 \times 13 = 143$ $99, 10 \times 12 = 120$ E ARRIVANDO A QUESTO
 $12 \times 14 = 168$ NUMERO ABBIAMO CAPITO CHE ASSIEME,
 $13 \times 15 = 195$ NON POTEVA FARE UNA GRIGLIA CON
 $14 \times 16 = 224$ PRECISI 112 QUADRETTI E ABBIAMO GIÀ
 RISPOSTO ALLA PRIMA DOMANDA.
 SIAMO ANDATI AVANTI FACENDO LE
 OPERAZIONI: $11 \times 13 = 143, 12 \times 14 = 168,$
 $13 \times 15 = 195$ E $14 \times 16 = 224$ E INFATTI
 ARRIVANDO A QUESTO NUMERO
 ABBIAMO CAPITO CHE ASSIEME PÙ
 DISEGNARE UNA GRIGLIA CON
 224 QUADRETTI PRECISI E ABBIAMO

RISPOSTO ALLA SECONDA DOMANDA.

IN CONCLUSIONE SIAMO RIUSCITI A RISPONDERE A TUTTE
 E DUE LE DOMANDE: ASSIEME NON PÙ COSTRUIRE
 UNA GRIGLIA DA 112 QUADRETTI MA PÙ COSTRUIRE
 UNA DA 224.

Solo un protocollo presenta disegno e verbalizzazione del ragionamento, ma in modo molto semplice: (PR4012)



Noi abbiamo capito che per ogni quadrato dovevamo aggiungere una riga e una colonna di quadretti, continuando con la sequenza abbiamo visto che partendo da un quadrato di 99 cm^2 abbiamo superato il numero 112, perché siamo arrivati al numero 120. Proseguendo con i quadrati siamo arrivati al quadrato di 224 cm^2 . Assieme in tutto dovrà disegnare 14 righe fino a formare la griglia di 224 quadretti, perché non può disegnare la griglia di 112 quadretti.

Presenti alcuni casi di calcoli fatti "a caso":

PR4039

$3 \times 8 = 24$	$111 + 1 = 112$
$24 \times 2 = 48$	$112 + 112 = 224$
$48 \times 2 = 96$	
$96 + 111 = 207$	

RISPOSTA
 POTRÀ COSTRUIRE UNA GRIGLIA DI ESATTAMENTE 112 QUADRETTI E 224.

SPERAZIONE
 PER ARRIVARE ALLA SOLUZIONE, ABBIAMO FATTO TANTE MOLTIPLICAZIONI E ADDIZIONI. SIAMO ARRIVATI ALLA SOLUZIONE CHE LEI POTRÀ USARE 224 QUADRETTI.

PR4049.

IN RIGA
 $3 + 8 + 15 + 24 + 31 + 41 + 50 + 60 + 71 + 82 + 93 + 104 + 115 + 126 + 137 + 148 + 159 + 170 + 181 + 192 + 203 = 2143$

IN COLONNA
 $3 + 8 + 15 + 24 + 31 + 41 + 50 + 60 + 71 + 82 + 93 + 104 + 115 + 126 + 137 + 148 + 159 + 170 + 181 + 192 + 203 = 2143$

RISPOSTA
 non può trovare una griglia di 112 e di 224.

VERBALIZZAZIONE
 Mi sono arrivati la ragione è sempre di quadretti.

In alcuni casi (rarissimi in cat. 4) vi sono solo spiegazioni a parole, talvolta giudicate incomplete dai correttori. L'elaborato seguente presenta ad esempio un ragionamento corretto ma incompiuto :

PR4003

ABBIAMO OSSERVATO LE 4 GRIGLIE E ABBIAMO NOTATO CHE AGGIUNGENDO I QUADRATI IL NUMERO AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
 ABBIAMO SOMMATO 24 A 11 E CONTINUANDO SOMMAVAMO IL RISULTATO (1° ADDENDO) AL 2° ADDENDO CHE AUMENTAVA SEMPRE DI 2.
 112 NON ABBIAMO TROVATO, MA ABBIAMO TROVATO 224.

Categoria 5

Compiono spiegazioni verbali affiancate ai disegni delle griglie, in questo caso con un maggiore coordinamento tra le due rappresentazioni. Quindi in questa categoria cominciano a coesistere almeno due tipologie di spiegazioni, per lo più verbale e grafica, oppure verbale e procedurale con i calcoli (PR5014, PR5002, PR5073) PR 5014

Ragionamento

QUADRETTI DI PARTENZA
 $9 + 2 =$
 $11 + 2 = 13 + 2 = 15 + 2 = 17 + 2 \dots$

Soluzione

Siamo partiti da 24, allora aggiunti una riga sovrastante e una colonna retinale da cui abbiamo ricavato un ragionamento cioè da ogni colonna e riga aggiunte abbiamo aggiunto + 2 partendo così da 11 facendo $11 + 2 = 13 + 2 = 15 + 2 = 17 + 2 \dots$ → allora capivamo che 112 non si poteva fare. Allora abbiamo fatto sempre + 2 partendo da 11 arrivando così a 224 supponendo che 112 non si poteva fare perché 224 si può fare.

PR5002,

PROCEDIMENTO

ABBIAMO NOTATO CHE PER ANDARE DALLA GRIGLIA DI 3 QUADRETTI A QUELLA DI 8, SI AGGIUNGONO 5 QUADRETTI E, PER ARRIVARE A QUELLA DI 15 SI SONO AGGIUNTI 7 QUADRETTI OUNERO 2 IN PIÙ DELL'ALTRO. QUINDI AGGIUNGENDO 2 QUADRETTI ALLA SOMMA AGGIUNTA SI CALCOLA IL NUMERO DOPO.

OPERAZIONI				
11 +	13 +	15 +	17 +	19 +
24 =	35 =	48 =	63 =	80 =
35	48	63	80	99
21 +	23 +	25 +	27 +	29 +
99 =	120 =	143 =	168 =	195 =
120	143	168	195	224

dati		cerco	
4 griglie alla partenza devi sommare 1 in altezza e 1 in larghezza		? riesci a creare una griglia di 112 quad. retti ? riesci a creare un	
$24+4=28$ ↑ quadrato 4	$28+7=35$ ↑ quadrato 3	$35+5=40+8=48$ ↑ quadrato 6	$54+6=54+9=63$ ↑ quadrato 7
$63+7=70+10=80$ ↑ quadrato 8	$80+8=88+11=99$ ↑ quadrato 9	$99+9=108+12=120$ ↑ quadrato 10	
$120+10=130+13=143$ ↑ quadrato 11	$143+11=154+14=168$ ↑ quadrato 12	$168+12=180+15=195$ ↑ quadrato 13	$195+13=208+16=224$ ↑ quadrato 14

Risposte: potrà costruire solo quelle da 224 quadrati.

Ragionamento: abbiamo aggiunto nel quarto 4 che è l'altezza e 7 che rappresenta la linea orizzontale e quella che si incrocia con quella verticale (1q.) dopo abbiamo aggiunto 1 quadrato ai 2 fattori e poi siamo arrivati alla conclusione

Presente ancora un errore dovuto all'operazione $\times 2$ oppure $:2$, forse indotta dalla frase del testo "aggiunge una riga e una colonna":
PR 5094

$(56 \times 2) = 112$
perché se aggiungiamo sempre più 2 alla griglia precedente
troviamo ~~se~~ i numeri che più avvicinano anche a 112

$(112 \times 2) = 224$
perché se facciamo il primo risultato $\times 2$, dunque, può
fare una griglia esattamente di 224.

Abbiamo fatto sempre più 2 (+2) per avvicinarci alla metà
e per trovare 224 abbiamo solo eseguito $(112 + 112)$ per
trovarlo.

Una spiegazione basata su una procedura additiva corretta, ma poco esplicitata :
PR5067

Continuando a costruire griglie rispettando la stessa regola, potrà costruire una griglia di esattamente 112 quadratini? **NO**

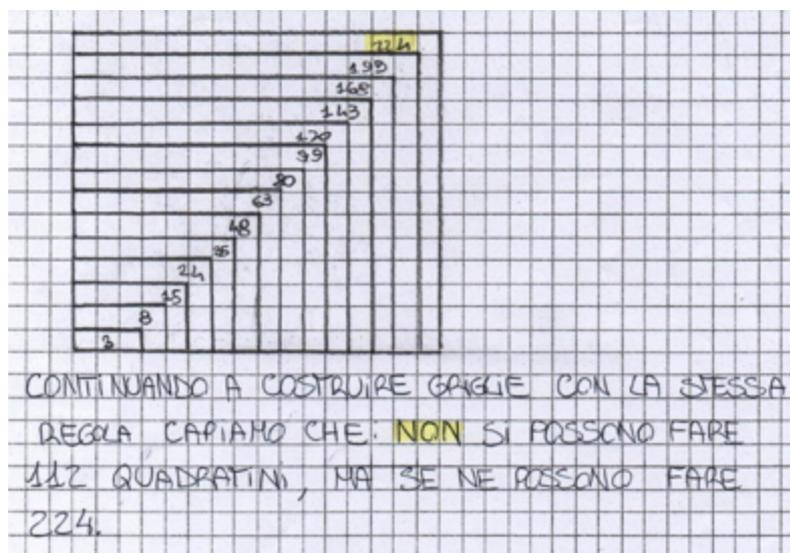
E una di esattamente 224? **SI**

Abbiamo trovato la distanza tra una griglia e l'altra,
(es. 3-8 distanza 5), dopo abbiamo visto che le distanze
erano più diverse. Il numero delle griglie più la distanza,
dopo ogni volta addizionavamo +1 la distanza e abbiamo
trovato la risposta.

Categoria 6

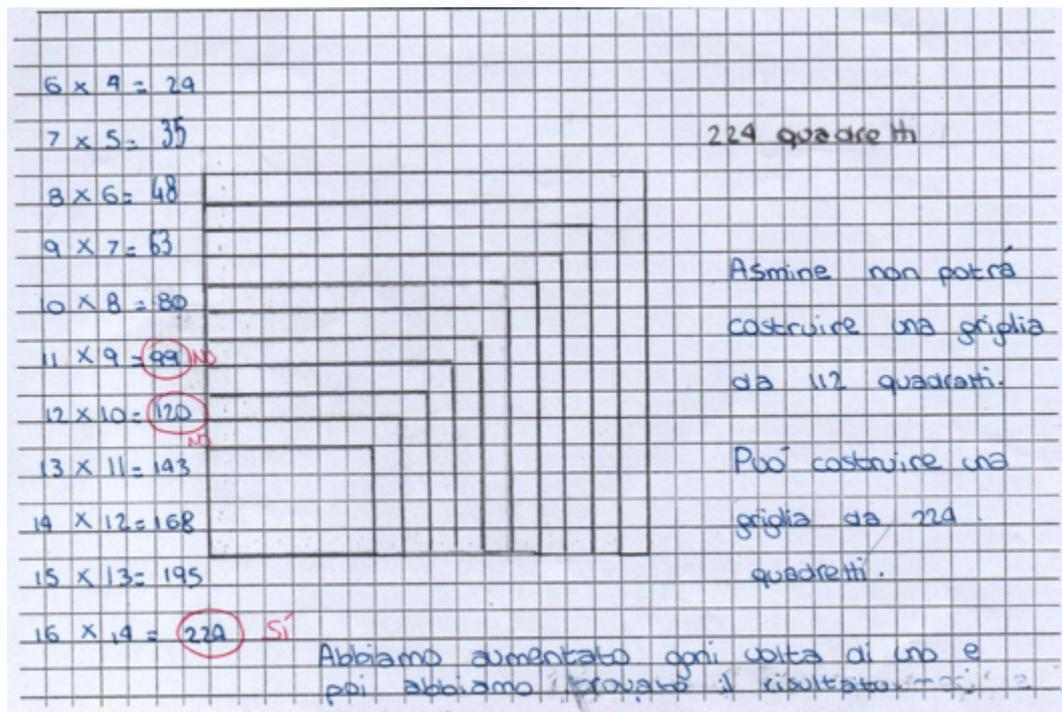
Gli elaborati di questa categoria mostrano una certa evoluzione sui seguenti aspetti:
i disegni non si presentano più in forma svincolata tra loro ma sono quasi sempre presentati in una figura che
raccolge le varie griglie incasellandole tra loro

MI06099



- le varie rappresentazioni si coordinano in maniera più armonica:

MI06036



- l'osservazione della regolarità numerica con cui variano le aree nella successione delle griglie viene prevalentemente osservata geometricamente, tuttavia viene descritta anche verbalmente, e a volte questa operazione avviene svincolandosi dall'osservazione dei disegni:

MI06108

Risposta: Asmine non potrà fare una griglia di 112 quadretti e invece potrà fare una da 224 quadretti.
 Abbiamo applicato la formula dell'area del rettangolo ($b \times h$) e abbiamo stabilito che ogni volta l'altezza aumentava di 1 e la base di 1. Abbiamo notato che tra il prodotto delle nostre moltiplicazioni non era presente il 112 ma era presente il 224.

e MI06079

NON POTRÀ COSTRUIRE UNA GRIGLIA DI 112 QUADRATI.
 SÌ, RUSCIRÀ A COSTRUIRE UNA GRIGLIA DI 224 QUADRATI.
 AGGIUNGENDO +2 ALLA DIFFERENZA DEL NUMERO DI QUADRATI
 DELLE 2 GRIGLIE PRECEDENTI, SI RIESCE A TROVARE IL NUMERO
 DELLA GRIGLIA SUCCESSIVA.

Si possono osservare due atteggiamenti dei ragazzi nell'affrontare il problema:

- uno più ingenuo in cui si concentrano sulla ricerca dei numeri richiesti. A volte infatti, pur osservando in maniera più evoluta la variabilità delle griglie, prevale l'atteggiamento aritmetico centrato sui calcoli:

MI06011

- l'altro più evoluto in cui appare evidente la visione funzionale nella successione delle griglie. I ragazzi arrivano anche a denotare sia il posto che occupa una griglia nella successione, sia il valore numerico dei quadretti.

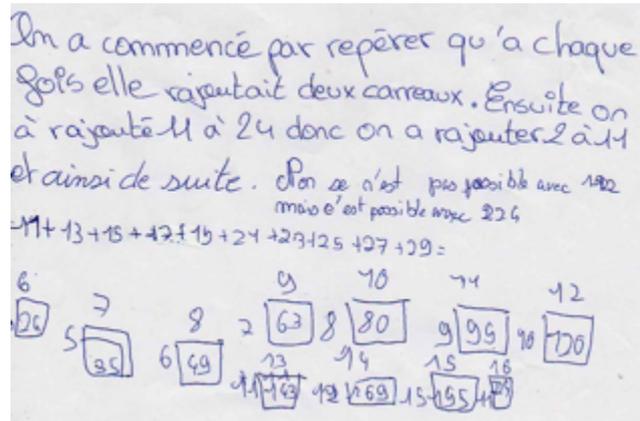
MI06051

Alcuni elaborati evidenziano che i ragazzi cominciano ad avere una visione funzionale del problema, riconoscono la variabilità correlata delle dimensioni della griglia. In un paio di casi perfino si distingue tra il numero d'ordine della griglia e i numeri che ne connotano le dimensioni. Gli allievi riescono anche a notare sia il posto occupato da una griglia nella successione, sia i valori numerici delle area dei rettangoli:

MI06063

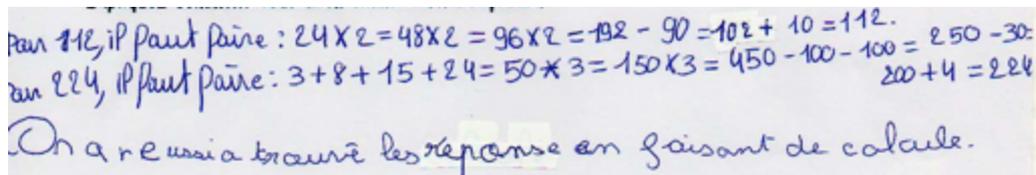
Compiono anche tre rappresentazioni coordinate tra loro, si evitano i disegni ricorrenti, ma si fa ricorso ad una sola figura che sinteticamente rappresenta la variabilità delle griglie.

FC6067

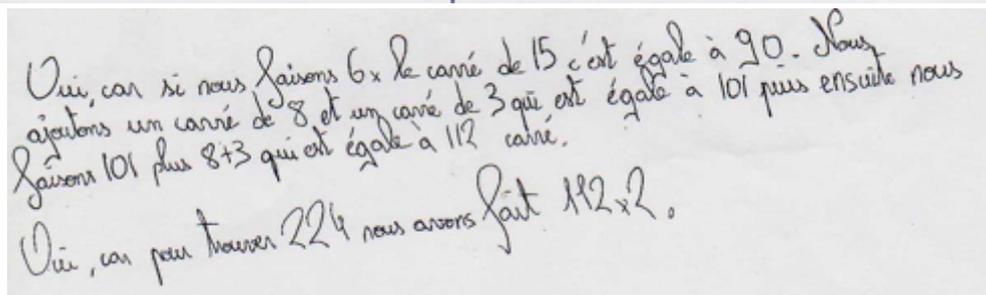


A volte si tenta di ragionare solo sui numeri, eliminando i disegni, ma questo tentativo spesso porta all'insuccesso nei risultati:

FC6122



FC6104



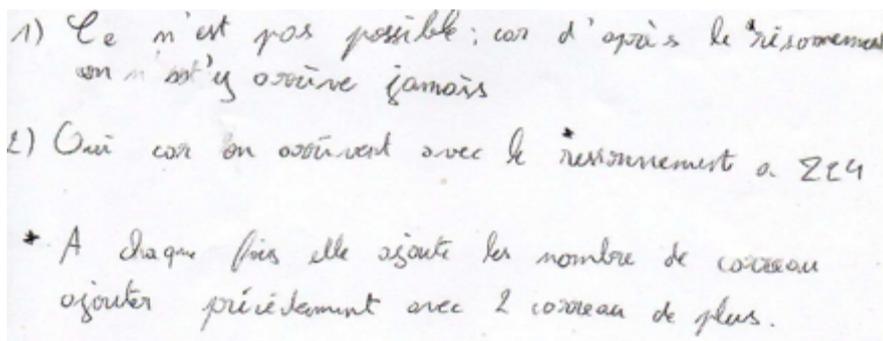
La chiave del problema consiste nel trovare due numeri interi la cui differenza è 2 e il cui prodotto è 112 e successivamente 224. In questo elaborato è stato compreso chiaramente:

FC6147



In un elaborato abbiamo trovato un tentativo di descrivere verbalmente la “regola” con cui le griglie cambiano e si accrescono.

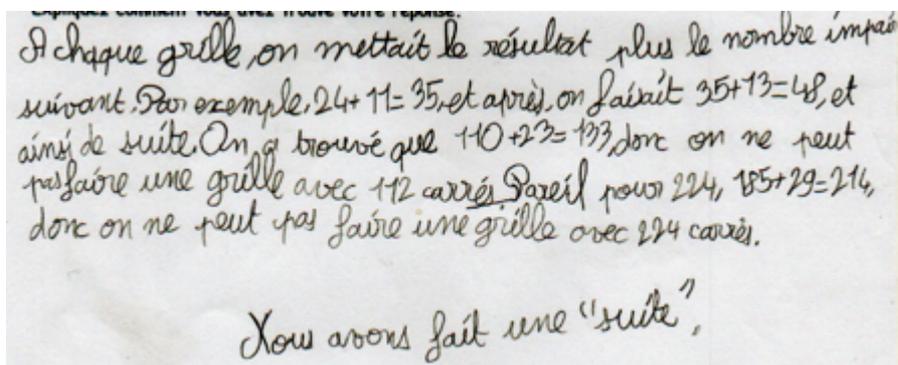
FC6143



Per andare più lontano

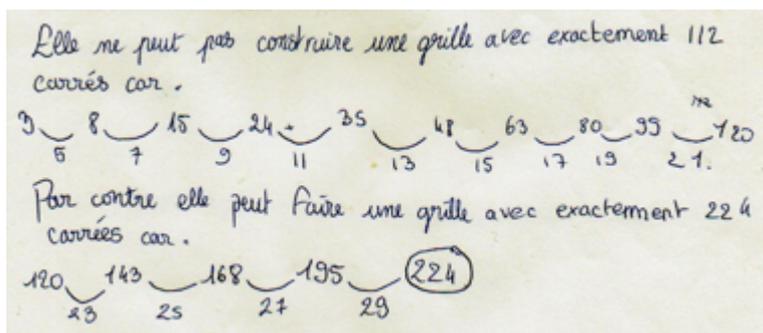
Questo problema potrebbe essere considerato come introduttivo alla nozione di funzione e di successione numerica, a condizione che la ricerca di una formula per esprimere il passaggio da una griglia all'altra sia necessaria per poter rispondere alla domanda.

FC6158



A questo scopo i numeri 112 e 224 si rivelano troppo piccoli, in quanto possono essere trattati con una successione di disegni schematici o di griglie incasellate. La variabile didattica del numero totale di quadretti risulta dunque essenziale per determinare l'obiettivo matematico del problema.

FC644

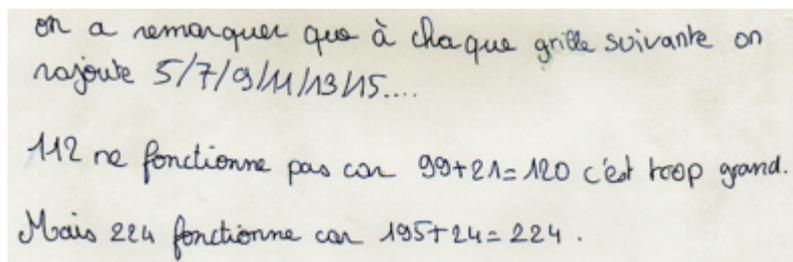


Potremmo porre la seguente domanda : *continuando a costruire griglie che rispettano la stessa regola, potremo costruire una griglia con esattamente 1224 quadretti ?*

Questo dato rende impossibile una soluzione grafica. Non è neppure possibile dare la successione numerica delle 34 aree successive espresse in quadretti: $3 (3 \times 1)$, $8 (4 \times 2)$, $15 (5 \times 3)$, ..., $1224 (36 \times 34)$ per la 34-esima griglia. La 33-esima è composta da $35 \times 33 = 1155$ quadretti, e dunque non è possibile ottenere griglie formate da un numero di quadretti strettamente compreso fra 1155 e 1224.

Il problema, per essere risolto nella sua generalità, suppone di avere una legge che fornisce l'area di una griglia in funzione della sua posizione nella successione. Il seguente elaborato ha ben compreso il processo che porta alla relazione funzionale cercata, ma al livello 6 non è possibile sfruttarlo adeguatamente.

FC6064

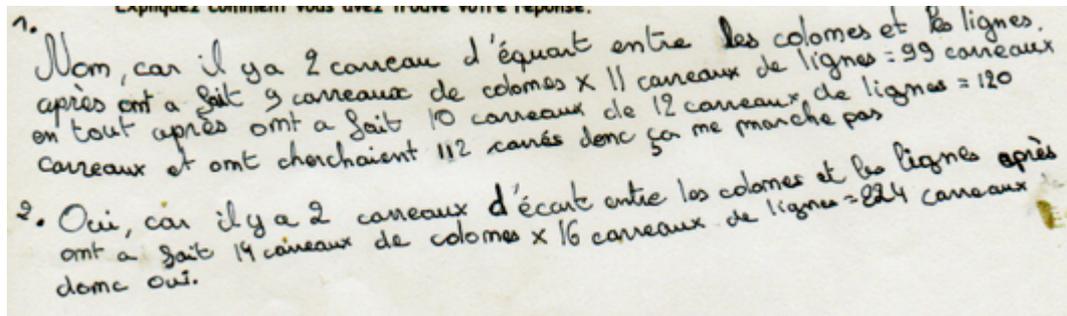


Seguendo questa regola di costruzione, possibile al livello 10, si può ottenere la seguente espressione : se n indica la posizione di una griglia nella successione, l'area corrispondente $A(n)$ è uguale alla somma dei numeri dispari da 3 a $2n+1$. Tale successione è ottenuta a partire dalla successione dei numeri interi da 1 a n , moltiplicandoli per 2 e aggiungendo 1 a ciascun numero. La sua somma è uguale al doppio della somma degli

interi da 1 a n (che vale $n(n+1)/2$) alla quale si aggiunge n : $A(n) = n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$. Quest'area può corrispondere a quella di una griglia a condizione che il numero di quadretti dato, N , sia tale che $N+1$ sia un quadrato perfetto e in questo caso la posizione n corrispondente è $n = \sqrt{N+1} - 1$.

Un'altra strategia risulta indubbiamente più abbordabile, in ogni caso ai livelli 8 e 9: l'area $A(n)$ è ottenuta dal prodotto della lunghezza per la larghezza della griglia, espressa in numero di lati di quadretti. Si può osservare che tali numeri differiscono di 2.

FC6148



Così, se n indica la posizione della griglia cercata, che corrisponde anche alla larghezza di tale griglia, si ha: $A(n) = n(n+2)$. Per valori abbastanza grandi di n , tale numero è vicino a n^2 . Se N è il numero dato di quadretti totali, la ricerca di un prodotto possibile si può fare per tentativi a partire dall'intero precedente \sqrt{N} . Nell'esempio proposto, con $1155 < N < 1224$, si ottiene $34 < \sqrt{N} < 35$, da cui il prodotto $A(n) = 34 \times 36 = 1224$.