Analyse de quelques procédures de calcul mental en vue de leur simulation
Perspective didactique

Monsieur Luc-Olivier POCHON
IRDP, case postale 54
2007 Neuchâtel, Suisse
luc.pochon@irdp.unine.ch

Monsieur Jean-François PERRET
Séminaire de psychologie
Université de Neuchâtel
1, Espace Agassiz
2000 Neuchâtel, Suisse
jean-francois.perret@lettres.unine.ch

RESUME : Le but de cet article est de rendre compte d'une tentative de simulation sur ordinateur de procédures de calcul mental. Il traite de la relation entre didactique et outil de simulation informatique et de la concrétisation de ce rapport dans un outil d'enseignement. Plus précisément, trois sujets sont abordés. Le premier concerne le problème des approches didactiques possibles adoptées pour son "enseignement". Le deuxième point traite de l'identification de certains procédés de calcul en vue de simuler les démarches adoptées par des calculateurs (humains). Finalement le problème de l'utilisation de cette "connaissance" dans un système "d'exercisation" est abordé. La conclusion montre que la dynamique liée au contexte de l'enseignement semble prédominante aussi bien au niveau de la spécification du système que des modalités de son utilisation.

1. But et intérêt du travail

> *La réflexion jointe à l'usage donne des idées nettes ; et alors on trouve des méthodes abrégées dont l'invention flatte l'amour propre, dont la justesse satisfait l'esprit, et qui font faire avec plaisir un travail ingrat par lui-même. (J.-J. Rousseau, Les Confessions)*

Cet article présente une tentative de simulation sur ordinateur de procédures de calcul mental. Il rend compte d'un travail de recherche engagé il y a plusieurs années déjà, dont le but final est de mettre à disposition des classes (de l'enseignement obligatoire et du début de la scolarité professionnelle) des outils d'aide à l'enseignement et à la remédiation basés sur les technologies informatiques. La recherche engagée comporte trois volets dont seuls les deux deniers seront développés ici. Le premier volet consiste à mener une réflexion sur les pratiques didactiques dans le domaine du calcul mental et à jauger différentes approches. Mentionnons ici seulement le fait qu'un thème récurrent dans la plupart des méthodes proposées concerne le problème de la prise de conscience par les apprenants de leurs procédures de calcul et de l'utilisation de cette « méta-connaissance » pour améliorer leur agilité dans la pratique du calcul. C'est dans ce sens que l'on trouve mentionné le calcul raisonné dans les programmes d'étude. Quant au "calcul rapide", il peut également être utilisé dans ce but quoique de façon moins explicite : en plus de favoriser la mémorisation et exercer des automatismes, il peut aussi favoriser la "découverte" de procédure efficaces. L'étude de ces approches nécessite une réflexion sur le lien entre les pratiques effectives des apprenants et les apports possibles de l'enseignant ou du formateur pour faire évoluer ces pratiques vers des formes plus efficaces.

Le deuxième objectif de l'étude est d'identifier certaines procédures de calcul et de réaliser un automate qui les mette en oeuvre. Ce travail intervient surtout pour mesurer l'écart entre ce qu'il est permis de réaliser avec une architecture informatique simple (règles de production) et les processus réellement en jeux dans "la tête" des apprenants. Il s'agit donc de s'attaquer à un début de réalisation d'une expertise en vue de la simulation d'un phénomène qui relève de processus mentaux complexes et non de procédures pré-établies et déjà codifiées. Ce volet est celui que nous poursuivons actuellement et qui pourrait conduire à des outils utilisables par des enseignants en cours de formation comme base de réflexion.

Finalement, le but plus pratique est d'utiliser l'automate dans un système "d'exercisation" du calcul sur ordinateur, avec l'étude des possibilités de généralisation à d'autres apprentissages de base. Nous verrons que les procédures "expertes" du système d'EAO ont finalement été réduites à leur plus simple expression et qu'à ce niveau d'autres pistes sont poursuivies.

2. Méthode de travail et plan de l'exposé

Dans un premier temps nous présenterons la phase du travail qui a consisté à recueillir le maximum d'informations sur les procédures utilisées en calcul mental ceci en se limitant au cas de l'addition qui paraît central. Pour cela, plusieurs sources ont été consultées. Elles proviennent de divers champs: travaux de didactique ou de la psychologie de l'apprentissage. Il a paru nécessaire de compléter ces informations par des protocoles de calcul obtenus par ce que l'on désignera ici sous le terme d'"introspection". C'est-à-dire que des opérateurs (parfois novices, mais principalement "experts") ont noté les différentes étapes de leurs calculs ou les ont décrites oralement au fur et à mesure de l'opération (méthode du "talking aloud"). Le calcul terminé, les différentes étapes pouvaient encore faire l'objet de commentaires. Cette méthode a l'avantage de cerner plus intimement certains des procédés difficilement perceptibles par un regard extérieur. C'est ce corpus qui a servi en premier lieu à dégager les règles de calcul utilisées dans l'automate.

Dans un deuxième temps, la structure de l'automate sera présentée de même que le résultats de quelques observations de son fonctionnement. Du point de vue des travaux utilisant des techniques d'intelligence artificielle, on se référera principalement au domaine des tuteurs « intelligents » dont la plupart des travaux classiques sont relatés par [WEN 87]. Depuis lors, le domaine s'est fortement développé. Toutefois, il faut noter, qu'en général, les travaux en intelligence artificielle se révèlent soit encore trop limités ou alors trop fondamentaux pour donner lieu à des applications utilisables facilement avec les moyens informatiques à disposition dans des centres de formation (parmi ces travaux, on trouve, par exemple, des modélisations du processus de la découverte des propriétés des opérations). Par ailleurs, on peut se demander si les techniques imaginées il y a plusieurs années ont toujours connu des applications dignes de leurs potentialités.

Dans un troisième temps, quelques indications seront données sur la façon dont l'automate de calcul a finalement été utilisé dans le système d'EAO.

Une discussion reprendra le problème du calcul mental entre procédures apprises et "naturelles" et le problème du méta-apprentissage lié à l'usage de systèmes d'exercisation du calcul mental sur ordinateur.

3. Que savons nous dans le domaine du calcul mental ?

> *Tu sais compter ?*
> *Oui ... un, deux, trois, ...*
> *Comment tu sais ?*
> *C'est mon cerveau qui le dit dans mon oreille.* (Flore, 3 ans)

La littérature concernant le calcul est vaste. Nous en avons finalement retenu qu'un échantillonnage permettant de cerner différentes facettes du phénomène: le calcul chez les calculateurs prodiges, la présentation d'un modèle relevant de la psychologie cognitive, un corpus d'observations recueillies dans le cadre de l'évaluation des programmes de mathématique et quelques relevés d'introspection.

L'étude des calculateurs prodiges montre l'ampleur du domaine que recouvre le terme de calcul mental. L'étude de Régnault [REG 52], qui vise à enseigner certains procédés mnémotechniques, fait tout d'abord une incursion dans le monde des calculateurs prodiges où une partie de ces procédures peut être trouvées. Ce survol a l'intérêt de fixer trois types de procédures: celles de l'arithmétique usuelle, c'est-à-dire celle transmises par l'école et la tradition (qualifiées de conventionnelles et illogiques par un calculateur prodige), les méthodes "naturelles" identifiées et entretenues par les calculateurs (par exemple procéder de gauche à droite sur les chiffres) et les processus, plus inconscients, qui permettent des raccourcis. L'origine de ces capacités exceptionnelles est difficile à cerner. Elles peuvent remonter souvent à des manipulations effectuées pendant l'enfance et dont le support n'est pas toujours le code numérique. Il est à mentionner que certains des calculateurs prodiges peuvent perdre une partie de leur capacité suite à un exercice insuffisant ou suite à l'usage de méthodes usuelles (il semble que cela soit le cas du physicien Ampère) mais que, par ailleurs, l'exercice et l'apprentissage de méthodes "naturelles" sont possibles et que certains opérateurs "instruits" peuvent rivaliser avec des calculateurs prodiges "naturels".

Plusieurs travaux de psychologie cognitive et de didactique ont examiné le problème du calcul mental. La compilation effectuée par M. Fayol [FAY 90] donne plusieurs indications intéressantes et propose un modèle utile. En particulier, il apparaît que chez les enfants (au niveau de la classe préparatoire), pour l'addition de m+n, le temps τ mis pour effectuer un calcul est proportionnel au minimum des deux termes m et n (loi du minimum). Mais cette loi est l'aboutissement d'une certaine progression. En règle générale, les plus jeunes enfants procèdent au comptage à partir du premier terme. Puis leurs procédures peuvent évoluer. Ils peuvent alors considérer en premier lieu le terme le plus grand (ce qui correspond alors à la loi du minimum). La plupart des enfants effectuent le comptage à partir de la valeur du premier terme considéré. Quelques enfants incluent ce premier terme dans le comptage, auquel cas τ est alors proportionnel à n+m.

Toutefois, ces lois ne sont pas valables pour n'importe quel couple de nombres. Les sommes à termes répétés, par exemple, suivent une autre loi. Par ailleurs, des élèves plus âgés ou des adultes procèdent à une récupération directe des résultats (ou de résultats partiels) en mémoire. Un processus de calcul fait donc intervenir des stratégies reproductives et d'autres qualifiées de constructives.

Le troisième type de données à disposition sont des observations d'élèves effectuées en situation de test (que l'on désignera par la suite par tests de 3e année (CE2)). Ces tests qui ont été administrés dans le cadre de l'évaluation des programmes de mathématique montrent une assez grande diversité des manières de procéder [PER 88]. On constate une prégnance de l'utilisation des nombres de gauche à droite, même si l'enseignement tente de faire appliquer la commutativité pour regrouper les termes de façon plus adéquate. On note également l'influence de procédures enseignées, par exemple l'algorithme de l'addition "en colonne".

Le travail d'introspection s'est réalisé avec quelques personnes (dont les auteurs). Il permet de retrouver globalement les procédures mises en évidence par les études mentionnées avec deux nuances toutefois. Tout d'abord, et ceci dans des laps de temps très courts, il est possible de passer d'une procédure à une autre[1]. La rapidité du processus donne l'impression que plusieurs types de procédures s'effectuent en parallèle. L'autre remarque concerne des opérations qui peuvent évoquer les court-circuits des calculateurs prodiges et qui ne semblent pas toutefois être un recours à la mémoire à long terme uniquement. En particulier, il peut être utile comme première approche, d'introduire la notion de "nombres amis", couple de nombres dont le résultat (en général un chiffre rond selon la base dix, mais aussi selon d'autres décompositions, base cinq, vingt, etc.) est bien connu et qui constitue un "attracteur" lors de la réalisation d'un calcul (par exemple 45 et 55). On définira aussi, poussé par ces observations à définir des nombres "noyau", nombres dont presque toutes les décompositions sont des nombres amis (10 est souvent un noyau).

Finalement des analyses ad hoc montrent que pour une même personne l'approche peut être différente selon le calcul considéré. Les particularités des nombres en présence, notamment leur numérosité et angulosité[2] ont une influence sur le procédé utilisé.

---

[1] Par exemple lors de la réalisation du calcul 246 + 782 on observe une première tentative qui mène à 900 puis 988 (82+6). Ce processus est arrêté pour reprendre à 1020 pour finalement aboutir à 1028. La rapidité du passage d'une procédure à l'autre laisse supposer qu'un "superviseur" prépare diverses alternatives.

[2] Numérosité et angulosité d'un nombre selon Costermans [COS 90]. La numérosité d'un nombre est le nombre de chiffres qui le composent: numérosité (0) = 0, numérosité(1234) = 4. L'angulosité d'un nombre est le nombre de chiffres qui le composent en « supprimant » les zéros à droite: angulosité(0) = 0, angulosité (1640) = 3, angulosité (1604) = 4, angulosité (1600) = 2.

D’autres facteurs devraient encore être pris en compte comme le temps à disposition, par exemple.

Si la littérature permet de dégager des façons de calculer, elle est par contre plus avare en ce qui concerne les propositions didactiques. Plusieurs questions se posent: Faut-il faire converger les procédures spontanées vers des procédures types (les plus économes selon l'indice calculé par la machine) ? Faut-il exercer des méthodes reconnues comme "efficaces" ? Faut-il entraîner séparément des registres (mémoires des nombres, comptage, etc.) ? Faut-il encourager l'élève à utiliser des procédures où il éprouve une certaine facilité ou, au contraire, faut-il plutôt développer les aspects qui semblent lui faire défaut ? Ces alternatives se présentent fréquemment en pédagogie et il ne semble pas exister de réponse unique [BOU 96].

4. La construction d’un automate

> *5 plus 3 ça fait 8 ...*
> *On prend 1 à 5 et on le met à 3* (Bab, 6 ans)

Le modèle adopté propose tout d’abord une méthode pour évaluer la difficulté d’un calcul et définit des coefficients qui pourraient mesurer l'ampleur des ressources cognitives nécessaires à la réalisation des diverses étapes du calcul. Puis il repose sur quelques méta-règles et règles de calcul établies en partie à partir de la littérature mais principalement à partir des travaux d’introspection. Les résultats des tests de 3e année n’ont pas été utilisés à ce niveau mais ont été gardés afin de juger ultérieurement le fonctionnement de l’automate.

4.1. Caractérisation de la difficulté d’un calcul

Des didacticiens (en particulier Brousseau [BRS 86]) définissent la notion de 'coût' d'une opération élémentaire. Ils organisent ensuite des méthodes qui permettent de réaliser une tâche (un calcul complet) au moindre coût. Cette notion de coût peut être reliée à celle de "charge cognitive" utilisée en psychologie cognitive [RIC 89].

L'idée est ici de caractériser plus en détail la "charge cognitive" d'un calcul en tenant compte du processus adopté. On peut décomposer le coût d'une opération en considérant les trois coefficients : M, coût en mémoire (retenue, par exemple) ; P, coût en processus élémentaire (additionner 1 est un tel processus élémentaire, de même que permuter deux termes) ; T, nombre d’étapes du calcul. Ces coefficients sont calculés pour chaque opération effectuée et sommés pour le calcul complet. On se référera aux coefficients MPT. A noter que leur leur dénomination est indicative, leur signification cognitive réelle resterait à établir expérimentalement. Ils ne paraissent pas totalement indépendant les uns des autres.

4.2 Les règles de calcul

Le déroulement des calculs est décrit à l’aide de règles de production. C’est cette méthode qui est adoptée par Martial Vivet [VIV 84] dans des travaux anciens qui ajoute à des calculateurs symboliques des règles tenant compte des particularités de l'opérateur[3].

4.2.1. *Méta-règles*

Les méta-règles permettent de définir une première grande orientation dans la manière de calculer avant même de faire intervenir des opérations plus spécifiques s'occupant du calcul proprement dit. Les trois méta-règles utilisées sont:

MR1 : Il est procédé au calcul en utilisant les chiffres de gauche à droite ;
MR2 : Les nombres sont utilisés en général de gauche à droite ;
MR3 : Dans certains cas, le nombre le plus grand est considéré comme premier résultat partiel. Cette règle, dont l'application permet de retrouver la loi du minimum ne sera utilisée que si les nombres en présence sont des nombres spéciaux (noyau, amis, attracteurs) et si le concept de commutativité est supposé acquis.

4.2.2. *Quelques règles de calcul*

Les opérations élémentaires ont été principalement dégagées à partir des calculs effectués avec verbalisation et commentaires introspectifs chez des personnes expertes. Puis les procédures ont été formalisées avec une certaine normalisation des commentaires. Par exemple pour le calcul de 134+156 on a le "protocole" :

Exemple 1: *134 + 156 -> 200 (mis à part), 280 (cumul), 10 (calculé séparément), 290.*

Les termes entre parenthèses sont des ajouts a posteriori (liés au commentaire des opérateurs). La formalisation associée est notée par le nom de l'opération et une indication de son action. La plupart des opérations se comprennent d'elles-mêmes. Les termes "enregistrer" (qui sera restitué par « se souvenir » dans le système[4]) et "cumuler" (« ajouter dans sa mémoire ») se réfèrent à un registre indépendant du "centre de calcul" et qui permet d'accumuler un résultat partiel.

Dans cette succession d'opérations intervient une opération de décomposition qui est rarement repérable chez les opérateurs. Il en a toutefois été tenu compte dans certaines versions du simulateur. Les deux versions (avec ou sans opération "décomposer") sont toutefois équivalentes du point de vue des ressources mises en œuvre.

Quelques exemples supplémentaires montrent encore quelques "subtilités" dont il faut tenir compte dans la modélisation.

Exemple 2 : *35 + 36 -> 70+1, 71 (nombres amis 35,35)*
36 + 35 -> 40+31, 71 (emprunter à 35)

---

[3] On se réfère au calculateur humain par le terme opérateur. L'opération est l'action effectuée qui est identifiée d'une part par un nom symbolique ("cumuler" par exemple) et par une expression plus imagée ("ajouter dans sa mémoire").

[4] Le choix des termes permettant de composer les messages émis par l'ordinateur est difficile et aucune solution envisagée ne donne actuellement satisfaction.

Ces deux exemples montrent que selon l'ordre des termes et les nombres "familiers" de l'opérateur, les règles déclenchées peuvent être différentes (il n'y a pas un recours systématique à la permutation des termes selon MR2).

Certains nombres, proches d'un nombre simple (à faible angulosité) semblent pouvoir être utilisés comme "attracteur" ainsi que le montre ce protocole :

Exemple 3 : *990 + 455 -> 1000 - 10 + 455, 1000 + 445*

Dans ce cas c'est 990 qui a « attiré » l'opérateur et l'a amené à considérer 1000. On utilisera ici l'opération "compenser" (signalée par « aller à ») à distinguer de "emprunter à" (signalée elle par le vocable « emprunter à ») qui elle prend en compte les deux termes en présence. Ici l'attracteur est un nombre "rond", il pourrait aussi être lié à un couple de nombres amis (4 et 4 chez Bab, en exergue)

A partir de ces exemples, il est possible d'établir des règles de choix des opérations. Dans ce travail de formalisation, pour éviter « l'explosion combinatoire », il s'agit d'étudier soigneusement les conditions d'application des règles. Parfois certaines conditions plausibles, mais non observées formellement (angulosité du nombre), sont également ajoutées pour cela.

A noter encore que cette approche qui est liée à une approche symbolique du fonctionnement cognitif dont on connaît par ailleurs les limites [DUC 86] ne semble pas permettre de rendre compte de toute la subtilité de certains procédés. Par ailleurs, elle ne rend pas compte du parallélisme de certains calculs, des types de registres cognitifs mis en oeuvre (visuelle, symbolique, etc.). L'exemple suivant montre les limites de l'approche utilisée :

Exemple 4 : *257 + 45 -> 200 mis à part, 57+45 = 60 + … (suspension) = 52 + 50 = 102, 302*

Dans ce cas un calcul est engagé sur une piste qui est abandonnée pour repartir sur une nouvelle piste qui paraît plus facile. On voit donc ici un double processus, celui qui effectue le calcul et un processus d'évaluation plus "intuitif" de la stratégie engagée. Le modèle ne rend pas compte de cette dynamique.

Une autre amélioration du modèle devrait certainement faire intervenir plusieurs registres de mémoire, le rafraîchissement de ceux-ci et des coûts liés à leur utilisation. Mais l'intégration de ces différents facteurs dépasse largement la possibilité des moyens mis en oeuvre ici.

4.3. Observation de l'automate de calcul

Les tests de 3e année évoqués précédemment ont été soumis à l'automate. On essayera de voir quelles sont les procédures des élèves qui sont reproduites par l'automate et quels sont les coefficients qui leur sont attribués. On s'en tiendra ici à comparer les méthodes les plus fréquemment utilisées par les enfants (3e année scolaire) pour additionner 54 et 27 à celles de l'automate. L'automate propose 36 solutions différentes dont les plus courtes (la longueur est mesurée par le coefficient T) sont celles présentées ci-dessus. Dans le premier cas l'ensemble des procédures proposées par l'automate est mentionné, dans les autres cas on se contente de ne donner que les coefficients MPT.

L'automate est paramétré sur une connaissance "moyenne" des élèves de cet âge. L'opérateur "décomposer" est mis en œuvre de façon explicite.

Procédure 1
Enfants: Décomposition des termes avec séparation nette entre dizaine et unités (40% des élèves utilisent cette procédure). Exemple : 50 + 20 = 70, 4 + 7 = 11, 81

Automate	Coefficients MPT
décomposer, il reste à calculer : 50 + 4 + 27	0,2,2
se souvenir de 50, il reste à calculer : 4 + 27	1,0,1
permuter deux termes, il reste à calculer : 27 + 4	1,1,1
décomposer, il reste à calculer : 20 + 7 + 4	0,2,2
se souvenir de 70, il reste à calculer : 7 + 4	1,2,1 (50+20 revient à 5+2)
additionner, il reste à calculer : 11	0,4,1 (ici, 11 n'est pas noyau)
ajouter dans sa mémoire : 81	1,1,1
Total	4,12,9

Procédure 2
Enfants : Décomposition des termes avec séparation partielle des dizaines et des unités (18% des élèves utilisent cette procédure).

Exemple : 50 + 20 = 70, 70 + 7 = 77, 81 Coeff MPT = 4,10,9

Procédure 3
Enfants : Calcul à partir d'un des deux termes et décomposition du second terme (32% des élèves utilisent cette procédure).

Exemple : 54, 74, 81 Coeff MPT = 2,10,6

Procédure 4
Enfants : Par compensation, en arrondissant l'un des deux termes, ou les deux, à la dizaine la plus proche (4% des élèves utilisent cette procédure).

Exemple : 54 + 30 = 84, 84 - 3 = 81

Dans ce cas la procédure correspondante adoptée par l'automate mène aux coefficients 2,10,6 en cas d'utilisation de l'opération "aller à 30", et aux coefficients 2,9,8 dans le cas de l'utilisation de l'opération "emprunter à 27".

On notera que, paradoxalement, c'est la procédure qui semble la plus "coûteuse" pour l'automate qui est davantage utilisée par les élèves (40%). Cette procédure est enseignée à l'école. Cette procédure n'est d'ailleurs pas fournie par le système si la profondeur de recherche adoptée est trop faible !

Diverses interprétations sont possibles. Il peut y avoir un décalage entre les procédures des experts (qui ont servi à établir les règles) et celles des novices encore plus proches des procédures apprises à l'école. Il se peut aussi que, indépendamment du problème du niveau d'expertise, la prégnance du modèle appris soit la plus forte. La question qui peut se poser aussi est de savoir si les procédures décrites par les enfants, sont celles qu'ils ont effectivement utilisées. Enfin la validité cognitive des coefficients MPT n'est pas parfaitement établie.

Par contre, 32% des enfants utilisent tout de même la procédure (procédure 3) qui figure parmi les plus économiques fournies par l'automate.

5. Construction d'un système d'EAO

Le système est construit en s'inspirant du modèle classique qui met en œuvre la collaboration des trois "experts" (spécialiste de la matière, modèle de l'étudiant et pédagogue). Ce modèle a depuis lors été remis en cause (voir [BRU 91] pour une présentation et une critique du modèle) il n'en reste pas moins un concept de référence. Ici, un point de vue plus synthétique a été adopté qui est caractérisé par la collaboration d'un "didacticien" et d'un "psychologue". En particulier, il n'y a pas d'expertise pure de la matière, le didacticien est toujours présent dans la réalisation de la tâche.

L'interface est très simple, un calcul est affiché pendant un certain temps puis disparaît. A ce moment là, une "boîte de dialogue" apparaît où l'utilisateur est invité à taper le résultat qu'il a obtenu par calcul mental. Une certaine "pression" est exercée en liant le temps d'affichage du calcul à son indice de difficulté. Un temps de base permet d'ajuster cette pression en fonction de l'habileté initiale de l'utilisateur. Ainsi l'apprenant a la possibilité de percevoir un indice sur la difficulté du calcul à effectuer.

L'établissement d'un indice de difficulté résulte de diverses tentatives: la première voie choisie a consisté à utiliser les coefficients mis en évidence par des travaux en psychologie métrique (loi du minimum). Mais il s'avère difficile de calibrer les exceptions (par exemple: 23+23) fort nombreuses et variées, surtout avec des adultes (qui était ici le public cible), d'où l'idée d'utiliser l'automate et de proposer un indice calculé à partir du procédé qu'il juge le plus économique. Ce calcul s'effectue en utilisant les coefficients MPT et propose une combinaison pondérée de ces trois coefficients. La formule qui paraît donner les meilleurs résultats est de la forme a*M*sqrt(T)+ b*P. Elle tient compte du fait que M représente un nombre d'opérations ayant recours à la mémoire sans tenir compte de la durée de la mémorisation. Il s'agirait encore de vérifier les corrélations observées entre la performance globale, le temps de présentation du calcul, le temps total pour la réalisation du calcul, les procédures utilisées et un jeu de pondération des coefficients MPT.

Il est possible de modifier le comportement du système en modifiant les coefficients de pondération a et b, les nombres "noyau" à disposition et les nombres considérés comme amis. Le calcul du tempo tient compte de tous ces éléments ainsi que du temps de base.

Le problème suivant est d'ajuster ces coefficients de manière automatique en cours de travail. Pour le temps de base, cela ne pose pas de problème. Il est diminué ou augmenter en fonction du nombre d'erreurs commises. Par ailleurs, le "psychologue" tient à jour le modèle de l'élève. Il met à jour les nombres "noyau" disponibles à l'aide de quelques règles, par exemple : SI (un noyau N est présumé) ET (il existe N/5 nombres amis acquis liés à N) ALORS (le noyau N est acquis). Par ailleurs, deux nombres sont reconnus "amis" lorsqu'ils ont été additionnés sans erreur et rapidement à plusieurs reprises.

L'ajustement automatique des pondérations des coefficients MPT est plus problématique aussi bien d'un point de vue conceptuel, que didactique ou technique. Cela pose le problème du choix au niveau des stratégies d'apprentissage. On retrouve ici les problèmes évoqués à propos de la didactique générale du calcul. Par ailleurs, la lenteur du processus d'apprentissage, par le système, des caractéristiques de son interlocuteur (repérage des nombres "noyau" par la comptabilisation des erreurs et le calcul du temps mis pour donner la réponse), ou la complication introduite par des tests préliminaires (pour déterminer les pondérations des coefficients MPT) rendent l'utilisation du système peu pratique voire délicate.

Une tentative pour détourner ces problèmes a consisté à permettre à l'utilisateur de modifier lui-même ces coefficients. Une autre a été d'installer un dispositif qui permette à l'utilisateur de signaler au système les procédures adoptées et les nombres connus sans passer par les coefficients globaux qui peuvent recouvrir des réalités procédurales différentes.

En résumé l'usage du système a permis de tester différentes variantes des dispositifs d'ajustement des paramètres. Mais il a surtout mis en évidence l'importance toute relative que représentait cette composante par rapport à d'autres éléments de l'interface, notamment l'effet des messages, et par rapport au contexte de l'utilisation : en particlier les interactions entre les apprenants. Finalement, la voie suivie a été d'encourager l'apprenant à découvrir sa procédure optimale, et de lui fournir pour cela toutes les informations calculées par le système: indices, panoplie de procédures possibles, nombres "noyau". Une première version était totalement ouverte et l'apprenant pouvait lui donner n'importe quelle configuration désirée. Il avait ainsi la possibilité d'identifier des éléments intervenant dans un calcul et de prendre conscience de ses propres procédures de calcul, par là de les améliorer... peut-être. Par la suite cette ouverture a été réduite au vu de la complexité que cela occasionnait dans la manipulation du système. Le regard sur des procédures possibles a été relié à l'idée de « testez l'expert », démarche qui est proposée aux apprenants. Mais pour cela, le nombre de procédures calculées, qui permettent à l'apprenant, par comparaison d'avoir un certain regard sur son propre fonctionnement ont été réduites pour ne jamais dépasser un choix de 3 ou 4 possibles.

6. Discussion

Au terme de cette étude nous résumons les différents enseignements retirés selon les trois points de vue didactique, réalisation de l'automate, construction d'un système d'EAO.

Du point de vue didactique, si les propriétés (axiomes) des opérations représentent l'aboutissement de procédures naturelles de calcul, leur enseignement dans un but de développement du calcul mental n'est certainement pas à préconiser tel quel. Les propriétés des opérations et celles des nombres sont intimement liées dans les processus de calcul mental. Il faut donc introduire des propriétés plus fines et moins "organisées" que les propriétés du calcul algébrique formel. Toutefois la volonté de mettre en évidence des processus plus proches des fonctionnements réels se heurte au mur de complexité que représente le grand nombre de règles qui entrent en jeu dans l'« alchimie » des processus cognitifs. Les propositions faites qui présentent ces règles alliées à quelques procédures faisant intervenir des décompositions simples sont certainement encore les plus réalistes, moyennant la présence de formateurs ayant une certaine confiance que ces quelques « caricatures » vont diffuser vers des procédures efficaces tout en restant très différenciées. Dans ce domaine, il est difficile d'identifier une procédure unique vers laquelle il s'agirait de faire converger celle des apprenants.

Cela pose le problème de la médiation de l'enseignant (au sens de Feuerstein [MAR 90]) qui doit établir une communication avec l'élève non seulement à propos des règles de calcul, mais également à propos des processus engagés dans les démarches cognitives. Il n'est pas impossible qu'entre un apprenant et l'enseignant ce méta-niveau puisse prendre des tournures diverses alliant des stratégies verbales et non verbales.

En ce qui concerne l'automate, on relèvera la complexité du sujet. BUGGY [BRO 78] et d'autres systèmes après lui, s'intéresse à un algorithme, c'est-à-dire à une connaissance précédurale fortement conventionnelle. Même si certaines des erreurs peuvent renvoyer à des concepts plus psychologiques, ceux-ci peuvent être ignorés pour se référer aux règles établies. S'agissant de calcul mental, cette méthode ne peut pas facilement se transposer. On a également vu que les processus mentaux s'accommodent certainement mal de la méthode symbolique et uni-processus qui est adoptée. Une voie à explorer qui se rapproche d'un modèle neuronal pourrait introduire la notion de Pnet [DEF 94] qui considère les nombres comme des noeuds d'un réseau sémantique reliés entre eux par les relations, plus ou moins activées) que ces nombres entretiennent entre eux. Toutefois, dans ce cas le lien entre les procédures identifiées chez les opérateurs et celles utilisées par l'automate semble plus difficile à maîtriser.

On notera encore que dans cette modélisation, il a fallu utiliser des résultats de travaux parfois complémentaires, parfois antagonistes et que les modèles présentés sur le papier présentaient souvent des lacunes liées à l'ordonnancement des opérations que la réalisation a été obligée de combler. Par ailleurs, la dynamique de la programmation informatique pousse à introduire des concepts artificiels qui permettent la maîtrise technique. Le système qui en résulte constitue ainsi un modèle original qui intègre partiellement des descriptions de procédures utilisées mais qui a sa propre dynamique. Il devient objet d'observations et d'études particulières qui seules pourront décider de sa validité [OHL 88].

Lorsqu'un système d'EAIO mêlent à la fois la didactique et l'utilisation d'un automate, on constate que la médiation "machinique" reste assez faible (la machine ne prend en charge qu'une faible partie de l'aspect de méta-communication). Par ailleurs, une difficulté s'ajoute liée à la compréhension même de la machine par l'apprenant. Le choix des termes exprimant les procédures adoptées par la machine est un reflet de cette difficulté. Le rôle du maître en tant que médiateur devient dans un certain sens plus intéressant mais aussi plus complexe [VIV 91, GLA 93].

On est finalement amené à considérer le système global constitué par la machine et l'apprenant comme un tout: exercices de calcul, messages, fonctionnement, etc., ne peuvent être dissociés. Le problème est d'estimer les effets en retour de ce "mixte" sur l'apprenant et, pourquoi pas, sur le système. Ces considérations sont classiques par rapport aux travaux sur l'utilisation de LOGO ainsi que le signale M. Vivet [SAN 91]. La réalisation d'un automate de simulation et la réalisation d'un système d'EIAO mènent à des démarches qui ne sont pas toujours compatibles comme cela a déjà été noté par plusieurs auteurs [CLA 92, BRU 94, MEN 95].

7. Conclusion

En définitive, un projet qui se voulait être une simple application pratique d'un modèle éprouvé en EIAO sur une sujet apparemment anodin s'est révélé plus ardu que prévu. Tout d'abord la didactique n'offre pas de "voie royale" qu'il suffirait de modéliser. Puis la modélisation de processus cognitif "profond" se laisse difficilement abordé par des outils techniques simples telles que les règles de production. Finalement, les démarches suivies dans la réalisation d'un automate et celles nécessaires à la mise au point d'un EIAO ne sont que partiellement compatibles. A un moment donné, le divorce était inévitable. L'automate ira se perfectionner dans des lieux de formation d'instituteurs tout en servant de base de réflexion pour l'enseignement du calcul mental pour de futurs enseignants. Quant au système d'EIAO, utilisé en formation initiale et continue dans la formation professionnelle, il s'est vu enrichi d'expertises "de surface" dans d'autres domaines (proportionnalité, résolution d'équations), mais c'est une dynamique pédagogique plus globale qui dirige son évolution.

REMERCIEMENTS : Les auteurs remercient Anne Maréchal (Ecole normale de Bienne) qui a apporté nombre d'idées sur les adaptations nécessaires de l'automate pour rendre son utilisation en classe envisageable. Par ailleurs, Françoise Stafilopatis (Fondation suisse pour les téléthèses, Neuchâtel) a apporté sa collaboration dans le codage des règles en Prolog.

Bibliographie

[BOU 96] Boule, F. 31-18 ? Regards sur le calcul mental. *Grand N*, 58, p 39-52.

[BRO 78] Brown, J.S., Burton, R.R. Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills. *Cognitive Science* 2, p 155-192.

[BRS 86] Brousseau, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Thèse d'Etat, Bordeaux, 1986.

[BRU 91] Bruillard, E. *Mathématiques et enseignement intelligemment assisté par ordinateur, une vision hypertexte des environnements d'apprentissage.* Thèse de doctorat de l'Université du Maine, 1991.

[BRU 94] Bruillard, E. & Vivet, M. Concevoir des EIAO pour des situations scolaires, approche méthodologique. In N. Balacheff & M. Vivet (Coord.) *Didactique et intelligence artificielle.* La Pensée Sauvage, Editions, 1994.

[CLA 92] Clancey, W.J. New perspective on cognition and instructional technology. in E. Costa (Ed.) *New direction for intelligent tutoring system,* p 3-14. Berlin : Springer Verlag, 1992.

[COS 90] Costermans, J. Les associations entre les nombres de 0 à 1.000.000 en fonction de l'âge. *Archives de psychologie* 58, p 3-27.

[DEF 94] Defays, D. Numbo: a study in cognition and recognition. In D. Hofstadter, *Fluid concepts and creative analogies*, p 131-154. New York : BasicsBooks, 1994.

[DUC 86] Ducret, J.-J. *Winograd et Flores, ou l'oubli de la psychologie.* Genève : Genetic artificial intelligence and epistemics laboratory (Memo 5), 1986.

[FAY 90] Fayol, M. *L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution de problème*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé, 1990.

[GLA 93] Glardon, A. EAO au Centre de formation professionnelle et sociale du Château de Seedorf. *Interface* 4 (1993), p 19-21.

[MAR 90] Martin, J. & Paravy, G. (Dir.*) Pédagogies de la médiation: autour du PEI du professeur Feuerstein*. Rencontres internationales de l'éducabilité permanente. Lyon : Chronique sociale, 1990.

[MEN 95] Mendelsohn, P. EIAO et psychologie cognitive. *Sciences et techniques éducatives*, 2 (1), p 9-30.

[OHL 88] Ohlsson, S. Computer simulation and its impact on educational research and practice. In M. Rabinowitz (Ed.) Computer simulations as research tools. *International Journal of Educational Research*, 12 (1), p 5-34.

[PER 88] Perret, J.-F. *IRDP, connaissances mathématiques à l'école primaire. Bilan des acquisitions en fin de troisième année*. Berne : Editions Peter Lang, 1988.

[REG 52] Régnault, J. *Les calculateurs prodiges: l'art de jongler avec les nombres (illusionnisme et calcul mental)*. Paris : Payot, 1952.

[RIC 89] Richard, J.-F., Bonnet, C., Ghiglione, R. *Traité de psychologie cognitive, tome 2: Le traitement de l'information symbolique*. Paris : Dunod, 1989.

[SAN 91] Sandberg, J. Interviews on AI and Education: Martial Vivet. *AI Communications*, 4 (2/3), p 53-59.

[VIV 84] Vivet, M. *Expertise mathématique et informatique: CAMELIA un logiciel pour raisonner et calculer*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 1984.

[VIV 91] Vivet, M. Usage des tuteurs intelligents: prise en compte du contexte, rôle du maître. In M. Baron, R. Gras & J.-F. Nicaud, *Deuxièmes journées EIAO de Cachan*, p 239-246.Cachan : Edition de l'Ecole normale supérieure de Cachan, 1991.

[WEN 87] Wenger, E. *Artificial Intelligence and tutoring Systems. Computational and Cognitive Approaches to the Communication of Knowledge*. Los Altos : Morgan Kaufmann Pub, 1987.