Analyse de quelques procédures de calcul mental en vue de leur simulation: perspective didactique

Luc-Olivier Pochon[1], Jean-François Perret[2]

Résumé: *Le but de cet article est de rendre compte d'une tentative d'appréciation de la relation entre didactique et outil de simulation informatique et de la concrétisation de ce rapport dans un outil d'enseignement. Plus précisément, à propos du calcul mental, trois sujets sont abordés. Le premier concerne le problème des approches didactiques possibles adoptées pour son "enseignement". Le deuxième point traite de l'identification de certains procédés de calcul en vue de simuler les démarches adoptées par des calculateurs (humains). Finalement le problème de l'utilisation de cette "connaissance" dans un système "d'exercisation" est abordé. La conclusion montre que la dynamique liée au contexte de l'enseignement semble prédominante aussi bien au niveau de la spécification du système que des modalités de son utilisation.*

Mots-clés: didactique, calcul mental, système à base de connaissances

1. But et intérêt du travail

> *La réflexion jointe à l'usage donne des idées nettes; et alors on trouve des méthodes abrégées dont l'invention flatte l'amour propre, dont la justesse satisfait l'esprit, et qui font faire avec plaisir un travail ingrat par lui-même.*
> *(J.-J. Rousseau, Les Confessions)*

Cet article présente une tentative de simulation sur ordinateur de procédures de calcul mental. Il rend compte d'un travail engagé il y a plusieurs années déjà, dont le but est de mettre à disposition des classes (de l'enseignement obligatoire et du début de la scolarité professionnelle) des outils d'aide à l'enseignement et à la remédiation basés sur les technologies informatiques. La recherche comporte trois volets. Le premier volet consiste à mener une réflexion sur les pratiques didactiques du calcul et à jauger différentes approches. Certaines de ces approches se concentrent essentiellement sur les opérations et leurs propriétés (c'est une des particularités introduites par les mouvements de rénovation de l'enseignement des mathématiques des années septante), d'autres peuvent proposer des procédures

---

[1] Institut de recherche et de documentation pédagogique et Université de Neuchâtel.

[2] Universités de Fribourg et Neuchâtel. Les auteurs remercient Anne Maréchal (Ecole normale de Bienne) qui a apporté nombre d'idées sur les adaptations nécessaires de l'automate pour rendre son utilisation en classe envisageable. Par ailleurs, Françoise Stafilopatis (Fondation suisse pour les téléthèses, Neuchâtel) a apporté sa collaboration pour le codage des règles en Prolog.

systématiques qui se focalisent sur des décompositions des nombres[1]. Le calcul mental constitue toujours un élément central parmi les apprentissages de base. La question des opérations arithmétiques se trouvent au centre de maints débats menés lors des réformes successives de l'enseignement mathématique. De plus, les diverses propositions pédagogiques concernant l'entraînement au calcul mental sont certainement représentatives des approches didactiques qu'il est possible d'adopter dans l'enseignement des mathématiques élémentaires.

Un thème récurrent dans la plupart des méthodes proposées concerne le problème de la prise de conscience par les apprenants de leurs procédures de calcul et de l'utilisation de cette « méta-connaissance » pour améliorer leur agilité dans la pratique du calcul. C'est dans ce sens que l'on trouve mentionné le calcul raisonné dans les programmes d'étude. Quant au "calcul rapide", il peut également être utilisé dans ce but quoique de façon moins explicite : en plus de favoriser la mémorisation et exercer des automatismes, il peut aussi favoriser la « découverte » de procédure efficaces. L'étude de ces approches nécessite une réflexion sur le lien entre les pratiques effectives des apprenants et les apports possibles de l'enseignant ou du formateur pour faire évoluer ces pratiques vers des formes plus efficaces.

Le deuxième objectif de l'étude est d'identifier certaines de ces procédures de calcul et de réaliser un automate qui les mette en oeuvre. Ce travail intervient surtout pour mesurer l'écart entre ce qu'il est permis de réaliser avec une architecture informatique simple (utilisation de règles de production) et les processus réellement en jeux dans "la tête" des apprenants. Il s'agit donc de s'attaquer à un début de réalisation d'une expertise en vue de la simulation d'un phénomène qui relève de processus mentaux complexes et non de procédures pré-établies et déjà codifiées. Ce volet est celui que nous poursuivons actuellement et qui pourrait conduire à des outils utilisables par des enseignants en cours de formation comme base de réflexion. Des systèmes informatisés pourraient aider non seulement l'apprenant, mais rendre également service à l'enseignant et au formateur en permettant d'intégrer, de faire interagir et de mettre en oeuvre les savoirs partiels accumulés par la recherche et la pratique.

Finalement, un but plus pratique est d'imaginer une mise en œuvre de l'automate dans un système "d'exercisation" du calcul sur ordinateur, avec l'étude des possibilités de généralisation à d'autres apprentissages de base. Nous verrons par la suite que les procédures "expertes" du système d'EAO ont finalement été réduites à leur plus simple expression et qu'à ce niveau d'autres pistes sont poursuivies.

2. Méthode de travail et plan de l'exposé

Dans un premier temps nous présenterons la phase du travail qui a consisté à recueillir le maximum d'informations sur les procédures utilisées en calcul mental

[1] Pour fixer les idées on se référera à la procédure proposée par M. Bacquias (1990). C'en est une parmi d'autres qui a le mérite d'être exposée systématiquement.

ceci en se limitant au cas de l'addition qui paraît central. Pour cela, plusieurs sources ont été consultées. Elles proviennent de divers champs: travaux de didactique ou de la psychologie de l’apprentissage. Il a paru nécessaire de compléter ces informations par des protocoles de calcul obtenus par ce que l’on désignera ici sous le terme d’"introspection". C’est-à-dire que des opérateurs (parfois novices, mais principalement "experts") ont noté les différentes étapes de leurs calculs ou les ont décrites oralement au fur et à mesure de l’opération (méthode du "talking aloud"). Le calcul terminé, les différentes étapes pouvaient encore faire l’objet de commentaires. Cette méthode a l’avantage[1] de cerner plus intimement certains des procédés difficilement perceptibles par un regard extérieur. Elle produit des « faits à grand rendement » pour reprendre l’expression de Henri Poincaré (signalée par Hadamard, 1974). C’est ce corpus qui a servi en premier lieu à dégager les règles de calcul utilisées dans l’automate.

Dans un deuxième temps, la structure de l’automate sera présentée de même que le résultats de quelques observations de son fonctionnement. Du point de vue des travaux utilisant des techniques d’intelligence artificielle, on se réfèrera principalement au domaine des tuteurs « intelligents » dont la plupart des travaux classiques sont relatés par E. Wenger (1987). Depuis lors, le domaine s'est fortement développé. Toutefois, il faut noter, qu’en général, les travaux en intelligence artificielle se révèlent soit encore trop limités ou alors trop fondamentaux pour donner lieu à des applications utilisables facilement avec les moyens informatiques à disposition dans des centres de formation (parmi ces travaux, on trouve, par exemple, des modélisations du processus de la découverte des propriétés des opérations). Par ailleurs, on peut se demander si les techniques imaginées il y a plusieurs années ont toujours connu des applications dignes de leurs potentialités.

Dans un troisième temps, quelques indications seront données sur la façon dont l’automate de calcul a finalement été utilisé dans le système d’EAO.

Une discussion reprendra le problème du calcul mental entre procédures apprises et "naturelles" et le problème du méta-apprentissage lié à l’usage de systèmes d’exercisation du calcul mental sur ordinateur.

3. Que savons nous dans le domaine du calcul mental ?

Tu sais compter ?
Oui ... un, deux, trois, ...
Comment tu sais ?
C’est mon cerveau qui le dit dans mon oreille.

(Flore, 3 ans)

La littérature concernant le calcul est vaste. Nous en avons finalement retenu qu'un échantillonnage permettant de cerner différentes facettes du phénomène: le calcul chez les calculateurs prodiges, la présentation d’un modèle relevant de la

[1] Par ailleurs, chacun peut s'essayer à produire ces propres données en utilisant ce procédé et ainsi valider ou infirmer certaines affirmations!

psychologie cognitive, un corpus d'observations recueillies dans le cadre de l'évaluation des programmes de mathématiques et quelques relevés d'introspection.

L'étude des calculateurs prodiges montre l'ampleur du domaine que recouvre le terme de calcul mental. L'étude de Régnault (1952), qui vise à enseigner certains procédés mnémotechniques, fait tout d'abord une incursion dans le monde des calculateurs prodiges où une partie de ces procédures peut être trouvées. Ce survol a l'intérêt de fixer trois types de procédures: celles de l'arithmétique usuelle, c'est-à-dire celle transmises par l'école et la tradition (qualifiées de conventionnelles et illogiques par un calculateur prodige), les méthodes "naturelles" identifiées et entretenues par les calculateurs (par exemple procéder de gauche à droite sur les chiffres) et les processus, plus inconscients, qui permettent des raccourcis. L'origine de ces capacités exceptionnelles est difficile à cerner[1]. Elles peuvent remonter souvent à des manipulations effectuées pendant l'enfance et dont le support n'est pas toujours le code numérique. Il est à mentionner que certains des calculateurs prodiges peuvent perdre une partie de leur capacité suite à un exercice insuffisant ou suite à l'usage de méthodes usuelles (il semble que cela soit le cas du physicien Ampère) mais que, par ailleurs, l'exercice et l'apprentissage de méthodes "naturelles" sont possibles et que certains opérateurs "instruits" peuvent rivaliser avec des calculateurs prodiges "naturels".

Plusieurs travaux de psychologie cognitive et de didactique ont examiné le problème du calcul mental dont on ne considère ici que l'aspect additif.

La compilation effectuée par M. Fayol (1990) donne plusieurs indications intéressantes et propose un modèle utile. En particulier, il apparaît que chez les enfants (au niveau de la classe préparatoire), pour l'addition de m+n, le temps τ mis pour effectuer un calcul est proportionnel au minimum des deux termes m et n (loi du minimum). Mais cette loi est l'aboutissement d'une certaine progression. En règle générale, les plus jeunes enfants procèdent au comptage à partir du premier terme. Puis leurs procédures peuvent évoluer. Ils peuvent alors considérer en premier lieu le terme le plus grand (ce qui correspond alors à la loi du minimum). La plupart des enfants effectuent le comptage à partir de la valeur du premier terme considéré. Quelques enfants incluent ce premier terme dans le comptage, auquel cas τ est alors proportionnel à n+m.

Toutefois, ces lois ne sont pas valables pour n'importe quel couple de nombres. Les sommes à termes répétés, par exemple, suivent une autre loi. Par ailleurs, des élèves plus âgés ou des adultes procèdent à une récupération directe des résultats (ou de résultats partiels) en mémoire. Un processus de calcul fait donc intervenir des stratégies reproductives et d'autres qualifiées de constructives. Un descriptif plus détaillé et technique de certains de ces résultats est donné dans l'annexe 1.

[1] Les documents s'occupant des nombres dans l'inconscient (par exemple Paneth, 1976) s'attachent plus à leur signification symbolique qu'à l'aspect opératoire.

Le troisième type de données à disposition sont des observations d'élèves effectuées en situation de test (que l'on désignera par la suite par tests de 3e année (CE2)). Ces tests qui ont été administrés dans le cadre de l'évaluation des programmes de mathématique montrent une assez grande diversité des manières de procéder (Perret, 1988). On constate une prégnance de l'utilisation des nombres de gauche à droite, même si l'enseignement tente de faire appliquer la commutativité pour regrouper les termes de façon plus adéquate. On note également l'influence de procédures enseignées, par exemple l'algorithme de l'addition "en colonne".

Le travail d'introspection s'est réalisé avec quelques personnes (dont les auteurs). Il permet de retrouver globalement les procédures mises en évidence par les études mentionnées avec deux nuances toutefois[1]. Tout d'abord, et ceci dans des laps de temps très courts, il est possible de passer d'une procédure à une autre[2]. La rapidité du processus donne l'impression que plusieurs types de procédures s'effectuent en parallèle. L'autre remarque concerne des opérations qui peuvent évoquer les court-circuits des calculateurs prodiges et qui ne semblent pas toutefois être un recours à la mémoire à long terme uniquement. En particulier, il peut être utile comme première approche, d'introduire la notion de "nombres amis"[3], couple de nombres dont le résultat (en général un chiffre rond selon la base dix, mais aussi selon d'autres décompositions, base cinq, vingt, etc.) est bien connu et qui constitue un "attracteur" lors de la réalisation d'un calcul (par exemple 45 et 55). On définira aussi, poussé par ces observations à définir des nombres "noyau", nombres dont presque toutes les décompositions sont des nombres amis (10 est souvent un noyau).

Finalement des analyses ad hoc montrent que pour une même personne l'approche peut être différente selon le calcul considéré. Les particularités des nombres en présence, notamment leur numérosité et angulosité[4] ont une influence sur le procédé utilisé. D'autres facteurs devraient encore être pris en compte comme le temps à disposition, par exemple.

---

[1] Il n'est pas toujours très clair dans la littérature de savoir comment les calculs ont été administrés. Ici, l'énoncé est toujours écrit et en permanence sous les yeux de l'opérateur. Mais les procédures peuvent être modifiées dans le cas où tout le travail s'effectue de façon orale. D'autres représentations des nombres, notamment des représentations spatiales ou temporelles, peuvent entrer en jeu. On nous a signalé le cas d'adultes où toute la manipulation mentale de nombres était fondée sur la combinaison de dés (communication de Michel Favre).

[2] Par exemple lors de la réalisation du calcul 246 + 782 on observe une première tentative qui mène à 900 puis 988 (82+6). Ce processus est arrêté pour reprendre à 1020 pour finalement aboutir à 1028. La rapidité du passage d'une procédure à l'autre laisse supposer qu'un "superviseur" prépare diverses alternatives.

[3] Dans un premier temps ces nombres étaient appelés "androgynes" d'après le mythe lié à cette notion, définition qui ne convient pas vraiment selon l'acceptation usuelle de ce terme.

[4] Numérosité et angulosité d'un nombre selon Costermans (1990). La numérosité d'un nombre est le nombre de chiffres qui le composent: numérosité (0) = 0, numérosité(1234) = 4. L'angulosité d'un nombre est le nombre de chiffres qui le composent en « supprimant » les zéros à droite: angulosité(0) = 0, angulosité (1640) = 3, angulosité (1604) = 4, angulosité (1600) = 2.

Si la littérature permet de dégager des façons de calculer, elle est par contre plus avare en ce qui concerne les propositions didactiques. Plusieurs questions se posent: Faut-il faire converger les procédures spontanées vers des procédures types (les plus économes selon l'indice calculé par la machine) ? Faut-il exercer des méthodes reconnues comme "efficaces" ? Faut-il entraîner séparément des registres (mémoires des nombres, comptage, etc.) ? Faut-il encourager l'élève à utiliser des procédures où il éprouve une certaine facilité ou, au contraire, faut-il plutôt développer les aspects qui semblent lui faire défaut ? Ces alternatives se posent fréquemment en pédagogie et il ne semble pas exister une réponse unique (Boule, 1996).

4. La construction d'un automate

5 plus 3 ça fait 8 ...
On prend 1 à 5 et on le met à 3
(Bab, 6 ans)

Le modèle adopté propose tout d'abord une méthode pour évaluer la difficulté d'un calcul et définit des coefficients qui pourraient mesurer l'ampleur des ressources cognitives nécessaires à la réalisation des diverses étapes du calcul. Puis il repose sur quelques méta-règles et règles de calcul établies en partie à partir de la littérature mais principalement à partir des travaux d'introspection. Les résultats des tests de 3e année n'ont pas été utilisés à ce niveau mais ont été gardés afin de juger ultérieurement le fonctionnement de l'automate.

4.1. Caractérisation de la difficulté d'un calcul

Des didacticiens (en particulier Brousseau, 1986) définissent la notion de 'coût' d'une opération élémentaire. Ils organisent ensuite des méthodes qui permettent de réaliser une tâche (un calcul complet) au moindre coût. Cette notion de coût peut être reliée à celle de « charge cognitive » utilisée en psychologie cognitive (Richard, Bonnet & Ghiglione, 1989).

L'idée est ici de caractériser plus en détail la « charge cognitive » d'un calcul en tenant compte du processus adopté. On peut décomposer le coût d'une opération en considérant les trois coefficients : M, coût en mémoire (retenue, par exemple) ; P, coût en processus élémentaire (additionner 1 est un tel processus élémentaire, de même que permuter deux termes) ; T, nombre d'étapes du calcul. Ces coefficients sont calculés pour chaque opération effectuée et sommés pour le calcul complet. On se référera aux coefficients MPT. A noter que leur leur dénomination est indicative, leur signification cognitive réelle resterait à établir expérimentalement. Ils ne paraissent pas totalement indépendant les uns des autres.

4.2. Les règles de calcul

Le déroulement des calculs est décrit à l'aide de règles de production. C'est cette méthode qui est adoptée dans BUGGY (Brown & Burton, 1978) pour décrire des procédures (erronées) mises en oeuvre dans l'algorithme de la soustraction en colonne. C'est aussi pour décrire les erreurs dans le calcul avec des fractions que

Dumont (1989) propose cette méthode, de même que Martial Vivet (1984) dans des travaux anciens qui ajoute à des calculateurs symboliques des règles tenant compte des particularités de l'opérateur[1].

4.2.1 Méta-règles

Les méta-règles permettent de définir une première grande orientation dans la manière de calculer avant même de faire intervenir des opérations plus spécifiques s'occupant du calcul proprement dit. Les trois méta-règles utilisées sont:

MR1 : Il est procédé au calcul en utilisant les chiffres de gauche à droite;
MR2 : Les nombres sont utilisés en général de gauche à droite;
MR3 : Dans certains cas, le nombre le plus grand est considéré comme premier résultat partiel. Cette règle, dont l'application permet de retrouver la loi du minimum ne sera utilisée que si les nombres en présence sont des nombres spéciaux (noyau, amis, attracteurs) et si le concept de commutativité est supposé acquis.

4.2.2. Quelques opérations (ou règles)

Les opérations élémentaires ont été principalement dégagées à partir des calculs effectués avec verbalisation et commentaires introspectifs chez des personnes expertes. Puis les procédures ont été formalisées avec une certaine normalisation des commentaires. Par exemple pour le calcul de 134+156 on a le "protocole" :

Exemple 1 : *134 + 156 -> 200 (mis à part), 280 (cumul), 10 (calculé séparément), 290.*

Les termes entre parenthèses sont des ajouts a posteriori (liés au commentaire des opérateurs). La formalisation associée est notée par le nom de l'opération et une indication de son action. La plupart des opérations se comprennent d'elles-mêmes. Les termes "enregistrer" (qui sera restitué par « se souvenir » dans le système[2]) et "cumuler" (« ajouter dans sa mémoire ») se réfèrent à un registre indépendant du "centre de calcul" et qui permet d'accumuler un résultat partiel.

Dans cette succession d'opératons intervient une opération de décomposition qui est rarement repérable chez les opérateurs. Il en a toutefois été tenu compte dans certaines versions du simulateur. Les deux versions (avec ou sans opération "décomposer") sont toutefois équivalentes du point de vue des ressources mises en œuvre.

Quelques exemples supplémentaires montrent encore quelques "subtilités" dont il faut tenir compte dans la modélisation.

---

[1] On se référera au calculateur humain par le terme opérateur. L'opération sera l'action effectuée qui sera identifiée d'une part par un nom symbolique ("cumuler") par exemple) et par une expression plus imagée ("ajouter dans sa mémoire") .

[2] Le choix des termes permettant de composer les messages émis par l'ordinateur est difficile et aucune solution envisagée ne donne actuellement satisfaction.

Exemple 2 : *35 + 36 -> 70+1, 71 (nombres amis 35,35)*
36 + 35 -> 40+31, 71 (emprunter à 35)

Ces deux exemples montrent que selon l'ordre des termes et les nombres "familiers" de l'opérateur, les règles déclenchées peuvent être différentes (il n'y a pas un recours systématique à la permutation des termes selon MR2).

Certains nombres, proches d'un nombre simple (à faible angulosité) semblent pouvoir être utilisés comme "attracteur" ainsi que le montre ce protocole:

Exemple 3 : *990 + 455 -> 1000 - 10 + 455, 1000 + 445*

Dans ce cas c'est 990 qui a « attiré » l'opérateur et l'a amené à considérer 1000. On utilisera ici l'opération "compenser" (signalée par « aller à ») à distinguer de "emprunter à" (signalée elle par le vocable « emprunter à ») qui elle prend en compte les deux nombres termes en présence. Ici l'attracteur est un nombre "rond", il pourrait aussi être lié à un couple de nombres amis (4 et 4 chez Bab, en exergue)

D'autres protocoles (un peu plus formalisés) sont présentés en annexe 2. A partir de ces exemples, il est possible d'établir des règles de choix des opérations. L'une d'entre elles est donnée dans l'annexe 3. Dans ce travail de formalisation, pour éviter « l'explosion combinatoire », il s'agit d'étudier soigneusement les conditions d'application des règles. Parfois certaines conditions plausibles, mais non observées formellement (angulosité du nombre), sont également ajoutées pour cela.

A noter encore que cette approche formelle (qui est liée à une approche symbolique du fonctionnement cognitif dont on connaît par ailleurs les limites, Ducret, 1986) ne semble pas permettre de rendre compte de toute la subtilité de certains procédés. Il ne rend pas compte du parallélisme de certains calculs, des types de registres cognitifs mis en oeuvre (visuelle, symbolique, etc.). L'exemple suivant montre les limites de l'approche avec un seul processus :

Exemple 4 : *257 + 45 -> 200 mis à part, 57+45 = 60 + ... (suspension) = 52 + 50 = 102, 302*

Dans ce cas un calcul est engagé sur une piste qui est abandonnée pour repartir sur une nouvelle piste qui paraît plus facile. On voit donc ici un double processus, celui qui effectue le calcul et un processus d'évaluation de la stratégie engagée.

Finalement, mentionnons pour mémoire qu'il pourrait être judicieux, comme pour le cas de l'addition (addition avec noyau), de modifier certains opérateurs selon le modèle de l'étudiant. Notamment pour le choix de la décomposition. La priorité donnée aux différentes règles et méta-règles pourrait également varier d'un élève à l'autre.

Par ailleurs, une amélioration du modèle devrait certainement faire intervenir plusieurs registres de mémoire, le rafraîchissement de ceux-ci et toute sorte de coûts liés à leur utilisation. Mais l'intégration de ces différents facteurs dans le modèle (comme le fait, par exemple Anderson, 1983) dépasse largement la possibilité des moyens mis en oeuvre ici.

4.3. Observation de l'automate de calcul

Un choix de calculs dont on connaissait par ailleurs les procédures utilisées par des opérateurs, ont été soumis à l'automate. Les références utilisées sont la méthode de Bacquias, d'une part, et les résultats des tests de 3e année évoqués précédemment d'autre part. La méthode de Bacquias est un procédé proposé dans un but didactique, on se contentera de d'analyser un exemple. Par contre, les résultats des tests de 3e année fournissent des familles de procédures utilisées par les élèves. On essayera de voir quelles sont celles qui sont reproduites par l'automate et quels sont les coefficients de difficulté qu'i leur sont attribués.

4.3.1. Méthode « Bacquias »

Cette méthode (Bacquias, 1990) est une proposition didactique pour apprendre à calculer mentalement. Elle propose un cumul à partir du plus grand de deux nombres approximé à l'ordre de grandeur du plus petit. Par exemple:

Exemple 5 : *28387 + 3451 -> 28000 + 387 + 3451, 31000 + 451 + 387, 31700 + 87 + 51, 31800 + 7 + 31, 31838*

On constate que l'automate ne peut pas générer directement cette solution. Il procède par décompositions et recompositions intermédiaires et ajoute donc une étape supplémentaire. Cette méthode n'est appliquée par l'automate que si le nombre le plus grand s'avère être attracteur. On s'aperçoit que Bacquias est plus économe en mémoire. Par contre, l'opérateur manipule des nombres supérieurs. La question se pose si lors de l'addition de 28000 et 3000 une décomposition non prise en compte dans la méthode n'intervient pas de toute façon. Ce point a déjà été examiné précédemment.

Automate : Cumuler 20000
Cumuler 8000 et 3000, il faut encore calculer 387 + 451
Permuter, il faut encore calculer 451 + 387
Cumuler 400 et 300, il faut encore calculer 51 + 87
Permuter, il faut encore calculer 87 + 51
Cumuler 80 et 50,
Cumuler 8 (8 noyau)

4.3.2. Tests de 3e année "revisités"

On s'en tiendra à comparer les méthodes utilisées par les enfants (3e année scolaire) (Perret, 1988) pour additionner 54 et 27 à celles de l'automate. Dans chaque cas on signale les coefficients MPT. L'automate est paramétré sur une connaissance "moyenne" des élèves de cet âge. L'opérateur "décomposer" est mis en œuvre de façon explicite.

Méthode 1

Enfants: Décomposition des termes avec séparation nette entre dizaine et unités (40% des élèves utilisent cette procédure). Exemple : 50 + 20 = 70, 4 + 7 = 11, 81

Procédures de l'automate	Coefficients MPT
décomposer, il reste à calculer : 50 + 4 + 27	0,2,2
se souvenir de 50, il reste à calculer : 4 + 27	1,0,1
permuter deux termes, il reste à calculer : 27 + 4	1,1,1
décomposer, il reste à calculer : 20 + 7 + 4	0,2,2
se souvenir de 70, il reste à calculer : 7 + 4	1,2,1 (50+20 revient à 5+2)
additionner, il reste à calculer : 11	0,4,1 (autre version plus économique: "aller à")
ajouter dans sa mémoire : 81	1,1,1
Total	4,12,9

Méthode 2

Enfants : Décomposition des termes avec séparation partielle des dizaines et des unités (18% des élèves utilisent cette procédure). Exemple : 50 + 20 = 70, 70 + 7 = 77, 81

Automate : décomposer, il reste à calculer : 50 + 4 + 27
se souvenir de 50, il reste à calculer : 4 + 27
permuter deux termes, il reste à calculer : 27 + 4
décomposer, il reste à calculer : 20 + 7 + 4
ajouter dans sa mémoire 70, il reste à calculer : 7 + 4
ajouter dans sa mémoire 77, il reste à calculer 4
ajouter dans sa mémoire : 81 Coeff MPT = 4,10,9

Méthode 3

Enfants : Calcul à partir d'un des deux termes et décomposition du second terme (32% des élèves utilisent cette procédure). Exemple : 54, 74, 81

Automate : se souvenir de 54, il reste à calculer : 27
décomposer, il reste à calculer : 20 + 7
ajouter dans sa mémoire 74, il reste à calculer : 7
ajouter dans sa mémoire : 81 Coeff MPT = 2,10,6

La *méthode 4* (utilisée par 3% des élèves) passe par un calcul écrit.

Méthode 5

Enfants : Par compensation, en arrondissant l'un des deux termes, ou les deux, à la dizaine la plus proche (4% des élèves utilisent cette procédure). Exemple : 54 + 30 = 84, 84 - 3 = 81

Automate :	se souvenir de 54, il reste à calculer : 27 aller à 30, il reste à calculer : 30 + -3 ajouter dans sa mémoire 84, il reste à calculer -3 ajouter dans sa mémoire : 81	Coeff MPT = 2,10,6
	emprunter à 27, il reste à calculer : 60 + 21 se souvenir de 60, il reste à calculer 21 décomposer, il reste à calculer 20 + 1 ajouter dans sa mémoire 80, il reste à calculer 1 ajouter dans sa mémoire : 81	Coeff MPT = 3,9,8

L'automate propose 36 solutions différentes dont les plus courtes (la longueur est mesurée par le coefficient T) sont celles présentées ci-dessus.

Parmi celles-ci, on notera que, paradoxalement, c'est la procédure qui semble la plus « coûteuse » pour l'automate[1] qui est davantage utilisée par les élèves (40%). Cette procédure est enseignée à l'école. Cette procédure n'est d'ailleurs pas fournie par le système si la profondeur de recherche adoptée est trop faible !

Diverses interprétations sont possibles. Il peut y avoir un décalage entre les procédures des experts (qui ont servi à établir les règles) et celles des novices encore plus proches des procédures apprises à l'école. Il se peut aussi que, indépendamment du problème du niveau d'expertise, la prégnance du modèle appris soit la plus forte. La question qui peut se poser aussi est de savoir si les procédures décrites par les enfants, sont celles qu'ils ont été effectivement utilisées. Enfin la validité cognitive des coefficients MPT n'est pas parfaitement établie.

Par contre, 32% des enfants utilisent tout de même la procédure qui figure parmi les plus économiques fournies par l'automate.

A noter que les autres calculs laissent entrevoir des résultats semblables. Le nombre de procédures proposées par l'automate est toujours assez important (72 procédures pour 33+65, 348 pour 19+23+7, 292 pour 15+9+15).

5. Construction d'un système d'EAO

Le système est construit en s'inspirant du modèle classique qui met en œuvre la collaboration des trois "experts" (spécialiste de la matière, modèle de l'étudiant et pédagogue) (voir Bonnet, 1984 ou Bruillard ,1991 pour une présentation plus affinée et critique). Ce modèle a depuis lors été remis en cause (Self, 1988), il n'en reste pas moins un concept de référence. Ici, un point de vue plus synthétique a été adopté qui est caractérisé par la collaboration d'un "didacticien" et d'un

[1] En se tenant ici à un ordonnancement lexicographique des trois coefficients. C'est aussi le cas si on utilise diverses formules présentées ultérieurement. En l'absence d'un modèle théorique unique, il va de soi que cette affirmation est à prendre avec précaution.

"psychologue". En particulier, il n'ya pas d'expertise pure de la matière, le didacticien est toujours présent dans la réalisation de la tâche.

L'interface est très simple, un calcul est affiché pendant un certain temps puis disparaît. A ce moment là, une "boîte de dialogue" apparaît où l'utilisateur est invité à taper le résultat qu'il a obtenu par calcul mental. Une certaine "pression" est exercée en liant le temps d'affichage du calcul à son indice de difficulté. Un temps de base permet d'ajuster cette pression en fonction de l'habileté initiale de l'utilisateur. Ainsi l'apprenant a la possibilité de percevoir un indice sur la difficulté du calcul à effectuer.

Cette méthode est utilisée par le logiciel ELMO qui traite de l'apprentissage de la lecture. C'est aussi la façon dont les apprentissages sont parfois générés à l'école (pratique du calcul rapide en vue de faire évoluer les procédures). Toutefois, dans ce dernier cas, il est difficile de tenir compte de particularités individuelles, ce que devrait permettre par contre un système informatisé.

L'établissement d'un indice de difficulté résulte de diverses tentatives: la première voie choisie a consisté à utiliser les coefficients mis en évidence par des travaux en psychologie métrique: DIFFICULTE (m+n) = const * min (m,n) (loi du minimum). La constante pouvant varier selon le public considéré. Mais il s'avère difficile de calibrer les exceptions (par exemple: 23+23) fort nombreuses et variées, surtout avec des adultes (qui était ici le public cible), d'où l'idée d'utiliser l'automate et de proposer un indice calculé à partir du procédé qu'il juge le plus économique. Ce calcul s'effectue en utilisant les coefficients MPT et propose une combinaison pondérée de ces trois coefficients. La formule qui paraît donner les meilleurs résultats est de la forme a*M*sqrt(T)+ b*P. Elle tient compte du fait que M représente un nombre d'opérations ayant recours à la mémoire sans tenir compte de la durée de la mémorisation. Il s'agirait encore de vérifier les corrélations observées entre la performance globale, le temps de présentation du calcul, le temps total pour la réalisation du calcul, les procédures utilisées et un jeu de pondération des coefficients MPT[1].

Il est possible de modifier le comportement du système en modifiant les coefficients de pondération a et b, les nombres "noyau" à disposition et les nombres considérés comme amis. Le calcul du tempo tient compte de tous ces éléments ainsi que du temps de base.

Le problème suivant est d'ajuster ces coefficients de manière automatique en cours de travail. Pour le temps de base, cela ne pose pas de problème. Il est diminué ou augmenter en fonction du nombre d'erreurs commises. Le "psychologue" tient à jour le modèle de l'élève. Il met à jour les nombres "noyau" disponibles à l'aide de quelques règles, par exemple :

REGLE d'acquisition d'un noyau
SI

---

[1] Des calculs effectués sur la base de 20 exemples montrent une assez grande corrélation entre M et T (0.7), entre P et M (0.68), mais faible entre P et T (0.38). L'influence du type de calcul sur ces corrélations demanderait des analyses plus fines.

un noyau N est présumé ET
il existe N/5 nombres amis acquis liés à N
ALORS
le noyau N est acquis

Par ailleurs, deux nombres sont reconnus amis lorsqu'ils ont été additionnés sans erreur et rapidement à plusieurs reprises.

L'ajustement automatique des pondérations des coefficients MPT est plus problématique aussi bien d'un point de vue conceptuel, que didactique ou technique. Cela pose le problème du choix au niveau des stratégies d'apprentissage. On retrouve ici les problèmes évoqués à propos de la didactique générale du calcul.

Une tentative pour détourner ce problème a consisté à permettre à l'utilisateur de modifier lui-même ces coefficients. Une autre a été d'installer un dispositif qui permette à l'utilisateur de signaler au système les procédures adoptées et les nombres connus sans passer par les coefficients globaux qui peuvent recouvrir des réalités procédurales différentes.

Par ailleurs, la lenteur du processus d'apprentissage, par le système, des caractéristiques de son interlocuteur (repérage des nombres "noyau" par la comptabilisation des erreurs et le calcul du temps mis pour donner la réponse), ou la complication introduite par des tests préliminaires (pour déterminer les pondérations des coefficients MPT) rendent l'utilisation du système peu pratique voire délicate. De même, il était prévu dans la même veine de prolonger les règles justes par des « mal-rules » (Wenger, 1987, p 196) ou Dumont (1989). L'usage de « mal-rules » conjugué à l'utilisation de coefficients de difficulté permettrait d'expliquer certaines des erreurs non seulement en terme de schéma erroné (surgénéralisation, par exemple), mais aussi en terme de coût des opérations. Mais là aussi, l'apprentissage, cette fois-ci du système par l'apprenant (signification des messages), dépasserait la somme des informations utiles à l'apprentissage du calcul. Un rapport entre information directement utile et information totale délivrée par le système permettrait de jauger la complexité d'une interaction avec l'ordinateur.

En résumé l'usage du système a permis de tester différentes variantes des dispositifs d'ajustement des paramètres. Mais il a surtout mis en évidence l'importance toute relative que représentait cette composante par rapport à d'autres éléments de l'interface, notamment l'effet des messages, et par rapport au contexte de l'utilisation : les interactions entre les apprenants, en particulier.

Finalement, la voie suivie a été d'encourager l'apprenant à découvrir sa procédure optimale, et de lui fournir pour cela toutes les informations calculées par le système: indices, panoplie de procédures possibles, nombres "noyau". Une première version était totalement ouverte et l'apprenant pouvait lui donner n'importe quelle configuration désirée. Il avait ainsi la possibilité d'identifier des éléments intervenant dans un calcul et de prendre conscience de ses propres procédures de calcul, par là de les améliorer... peut-être. Par la suite cette ouverture a été réduite au vu de la complexité que cela occasionnait dans la manipulation du système. Le regard sur des procédures possibles a été relié à l'idée de « testez l'expert », démarche qui est proposée aux apprenants. Mais pour cela, le nombre de procédures calculées, qui permettent à l'apprenant, par comparaison d'avoir un certain regard sur son propre fonctionnement ont été réduites pour ne jamais dépasser un choix de 3 ou 4 possibles. La réalisation d'un automate de simulation et la réalisation d'un système d'EIAO mènent à des démarches qui ne sont pas toujours compatibles comme cela a été déjà noté par plusieurs auteurs (Clancey, 1992, Bruillard, 1994, Mendelsohn, 1995)

6. Discussion

Au terme de cette étude nous résumons les différents enseignements retirés selon les trois points de vue didactique, réalisation de l'automate, construction d'un système d'EAO.

Du point de vue didactique, si les propriétés (axiomes) des opérations représentent l'aboutissement de procédures naturelles de calcul, leur enseignement dans un but de développement du calcul mental n'est certainement pas à préconiser tel quel. Les propriétés des opérations et celles des nombres sont intimement liées dans les processus de calcul mental. Il faut donc introduire des propriétés plus fines et moins "organisées" que les propriétés du calcul algébrique formel. Toutefois la volonté de mettre en évidence des processus plus proches des fonctionnements réels se heurte au mur de complexité que représente le grand nombre de règles qui entrent en jeu dans l'« alchimie » des processus cognitifs. Les propositions faites qui présentent ces règles alliées à quelques procédures faisant intervenir des décompositions simples sont certainement encore les plus réalistes, moyennant la présence de formateurs ayant une certaine confiance que ces quelques « caricatures » vont diffuser vers des procédures efficaces tout en restant très différenciées[1]. Dans ce domaine, il est difficile d'identifier une procédure unique vers laquelle il s'agirait de faire converger celle des apprenants.

Cela pose le problème de la médiation de l'enseignant (au sens de Feuerstein, Martin & Paravy, 1990) qui doit établir une communication avec l'élève non seulement à propos des règles de calcul, mais également à propos des processus engagés dans les démarches cognitives. Il n'est pas impossible qu'entre un apprenant et l'enseignant ce méta-niveau puisse prendre des tournures diverses alliant des stratégies verbales et non verbales.

En ce qui concerne l'automate, on relèvera la complexité du sujet. BUGGY (Brown & Burton, 1978) et d'autres systèmes après lui, s'intéresse à un algorithme, c'est-à-

[1] Sans compter toutes les dimensions dont il s'agit de doser les extrêmes: l'axe objet (nombre) - opération (calcul), l'axe mémorisation (tables d'addition) - compréhension (propriétés des opérations), l'axe construction personnelle - apprentissage de procédures types, l'axe représentations (imagées, symboliques, ...).

dire à une connaissance précédurale fortement conventionnelle. Même si certaines des erreurs peuvent renvoyer à des concepts plus psychologiques, ceux-ci peuvent être ignorés pour se référer aux règles établies. S’agissant de calcul mental, cette méthode ne peut pas facilement se transposer. On a également vu que les processus mentaux s’accommodent certainement mal de la méthode symbolique et uni-processus qui est adoptée. Une voie à explorer qui se rapproche d'un modèle neuronal sont les Pnet de Defays (1994) qui considère les nombres comme des noeuds d'un réseau sémantique reliés entre eux par les relations, plus ou moins activées) que ces nombres entretiennent entre eux. Toutefois, dans ce cas le lien entre les procédures identifiées et celles utilisées par l'automate semble plus difficile à maîtriser.

On notera encore que dans cette modèlisation, il a fallu utiliser des résultats de travaux parfois complémentaires, parfois antagonistes et que les modèles présentés sur le papier présentent des lacunes liées à l’ordonnancement des opérations que la réalisation est obligée de combler. Par ailleurs, la dynamique de la programmation informatique pousse à introduire des concepts artificiels qui permettent la maîtrise technique. Le système qui en résulte constitue ainsi un modèle original qui intègre partiellement des procédures observées mais qui a sa propre dynamique. Il devient objet d'observations et d'études particulières qui seules pourront décider de sa validité (Ohlsson, 1988). C’est par ailleurs le côté excitant que de créer des automates dont le comportement échappe en partie à leur créateur.

Lorsque un système d'EAIO mêlent à la fois la didactique et l'utilisation d'un automate, on constate que la médiation "machinique" reste assez faible (la machine ne prend en charge qu'une faible partie de l'aspect de méta-communication). Par ailleurs, une difficulté s'ajoute liée à la compréhension même de la machine par l'apprenant. Le choix des termes exprimant les procédures adoptées par la machine est un reflet de cette difficulté. Le rôle du maître en tant que médiateur devient dans un certain sens plus intéressant mais aussi plus complexe (Vivet, 1991, Glardon, 1993)

Des propositions qui prenent en compte cette situation sont faites (voir Leclercq, 1991) qui demandent de relier un modèle de tuteur intelligent à des bases d’informations importantes (hypertexte) qui élargissent les activités de l’élève et par là offrent un espace de communication beaucoup plus riche.

On est donc amené à considérer le système global constitué par la machine et l'apprenant comme un tout: exercices de calcul, messages, fonctionnement, etc., ne peuvent être dissociés. Le problème est d’estimer les effets en retour de ce "mixte" sur l’apprenant et, pourquoi pas, sur le système. Ces considérations sont classiques par rapport aux travaux sur l'utilisation de LOGO (Sandberg, 1991).

7. Conclusion

En définitive, un projet qui se voulait être une simple application pratique d'un modèle éprouvé en EIAO sur une sujet apparemment anodin s'est révélé plus ardu que prévu. Tout d'abord la didactique n'offre pas de "voie royale" qu'il suffirait de modéliser. Puis la modélisation de processus cognitif "profond" se laisse difficilement abordé par des outils techniques simples telles que les règles de production. Finalement, les démarches suivies dans la réalisation d'un automate et celles nécessaires à la mise au point d'un EIAO ne sont que partiellement compatibles. A un moment donné, le divorce était inévitable. L'automate ira se perfectionner dans des écoles normales d'instituteurs tout en servant de base de réflexion dans le domaine du calcul mental pour de futurs enseignants. Quant au système d'EIAO, utilisé en formation initiale et continue dans la formation professionnelle, il s'est vu enrichi d'expertise "de surface" dans d'autres domaines (proportionnalité, résolution d'équations), mais c'est une dynamique pédagogique plus globale qui dirige son évolution.

Bibliographie

Anderson, J.R. (1983) **The Architecture of Cognition**. Cambridge: Harvard University Press.

Bonnet, A. (1984) **L'intelligence artificielle, promesses et réalités**. Paris: InterEditions.

Boule, F. (1996) 31-18 ?, Regards sur le calcul mental**. Grand N**, 58, 39-52.

Brown, J.S., Burton, R.R. (1978) Diagnostic Models for Procedural Bugs in Basic Mathematical Skills. **Cognitive Science** 2, 155-192.

Brousseau, G. (1986) **Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques**. Thèse d'Etat, Bordeaux.

Bruillard, E. (1991) **Mathématiques et enseignement intelligemment assisté par ordinateur, une vision hypertexte des environnements d'apprentissage**. Thèse de doctorat de l'Université du Maine.

Bruillard, E. & Vivet, M. (1994) Concevoir des EIAO pour des situations scolaires, approche méthodologique. In N. Balacheff & M. Vivet (Coord.). **Didactique et intelligence artificielle**. La Pensée Sauvage, Editions.

Clancey, W.J. (1992) New perspective on cognition and instructional technology. in E. Costa (Ed.) **New direction for intelligent tutoring system** 3-14. Berlin: Springer Verlag.

Costermans, J. (1990) Les associations entre les nombres de 0 à 1.000.000 en fonction de l'âge. **Archives de psychologie** 58, 3-27.

Defays, D. (1994) Numbo: a study in cognition and recognition. In D. Hofstadter, **Fluid concepts and creative analogies**, 131-154. New York: BasicsBooks.

Ducret, J.-J. (1986) **Winograd et Flores, ou l'oubli de la psychologie**. Genève: . Genetic artificial intelligence and epistemics laboratory (Memo 5).

Dumont, B. (1989) **Questionnements et interprétation des erreurs en mathématiques.** Thèse d'Etat présentée à l'Université de Paris 7.

Fayol, M. (1990) **L'enfant et le nombre, du comptage à la résolution de problème.** Neuchâtel: Delachaux et Niestlé.

Glardon, A. (1993) EAO au Centre de formation professionnelle et sociale du Château de Seedorf. **Interface** 4, 19-21.

Hadamard, J. (1975) **Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique**. Paris: Gauthier-Villars (Discours de la méthode). 1e édition, Princeton University Press, 1945.

Leclercq, D. (1991) Hypermedias et tuteurs intelligents : vers un compromis. In B. de la Passardière & G.-L. Baron (Ed.) **Actes des premières journées scientifiques hypermedias et apprentissages**, Châtenay-Malabry, 24 et 25 septembre 1995, 19-36. Paris: MASI & INRP.

Martin, J. & Paravy, G. (Dir.) (1990) **Pédagogies de la médiation: autour du PEI du professeur Feuerstein**. Rencontres internationales de l'éducabilité permanente. Lyon: Chronique sociale.

Mendelsohn, P. (1995) EIAO et psychologie cognitive. **Sciences et techniques éducatives**, 2 (1), 9-30.

Ohlsson, S. (1988) Computer simulation and its impact on educational research and practice. In M. Rabinowitz (Ed.) Computer simulations as research tools. **International Journal of Educational Research**,12 (1), 5-34.

Paneth, I. (1976) **La symbolique des nombres dans l'inconscient**. Paris: Payot (Petite bibliothèque Payot).

Perret, J.-F. (1988) **IRDP, connaissances mathématiques à l'école primaire. Bilan des acquisitions en fin de troisième année**. Berne: Editions Peter Lang.

Régnault, J. (1952) **Les calculateurs prodiges: l'art de jongler avec les nombres (illusionnisme et calcul mental).** Paris: Payot.

Richard, J.-F., Bonnet, C., Ghiglione, R. (1989) **Traité de psychologie cognitive, tome 2: Le traitement de l'information symbolique**. Paris: Dunod.

Sandberg, J. (1991) Interviews on AI and Education: Martial Vivet. **AI Communications**, 4 (2/3), 53-59.

Self, J. (1988) Bypassing the intractable problem of student modelling. **Proceedings of ITS 88**. Montreal, 18-24.

Vivet, M. (1984) **Expertise mathématique et informatique: CAMELIA un logiciel pour raisonner et calculer**. Thèse de doctorat, Université Paris VI.

Vivet, M. (1991) Usage des tuteurs intelligents: prise en compte du contexte, rôle du maître. In M. Baron, R. Gras & J.-F. Nicaud, **Deuxièmes journées EIAO de Cachan**, 239-246.Cachan: Edition de l'Ecole normale supérieure de Cachan.

Wenger, E. (1987) **Artificial Intelligence and tutoring Systems. Computational and Cognitive Approaches to the Communication of Knowledge**. Los Altos: Morgan Kaufmann Pub.

Annexe 1: Quelques informations sur le système de calcul

Michel Fayol (1990) présente une organisation cognitive pour la résolution de problèmes numériques. Un tel modèle est souvent très utile pour interpréter certains résultats qualitatifs. C'est ce modèle que nous avions principalement en tête. De façon schématique et résumée, nous avons retenu que ce modèle considère trois modules: Système de compréhension (C), système de production (P), système de calcul (CA). Les deux premiers systèmes se subdivisent en deux sous-systèmes. L'un relatif aux chiffres, l'autre aux dénominations verbales orales. Le système de compréhension comporte en particulier diverses procédures de quantification: subitizing (aperception globale), comptage, évaluation globale. Le système de production s'occupe de la mise en relation de faits entre eux. Les algorithmes font partie du système de calcul. Plus finement, par analyse des produits, calcul des temps, l'observation d'opérateurs au travail, par interrogation clinique, ou « talking aloud » (méthode que nous avons utilisée pour nos propres introspections) il est possible de préciser certains modèles. Pour l'addition, on distingue les stratégies reproductives (appel à la mémoire à long terme (MLT)) ou constructives (appel au processus de calcul).

Pour ces dernières le modèle du « compteur » permet de rendre compte du temps mis pour effectuer un calcul. Plus précisément, dans le cas de l'addition de deux termes: m + n, et si l'on prend pour calcul du temps: T = ax+b où x est le temps de calcul de la somme +1 on peut prendre comme prédicteur pour le coefficient a:

- a = m+n explique 0.71 de la variance chez les adultes et 0.11 au CP
- a= min(m,n) explique 0.73 de la variance chez les adultes et 0.80 au CP. (Fayol, 1990)

Ceci va dans le sens des conclusions de Groen et Parkman (citées également par Fayol):
- au CP les enfants procèdent par comptage à partir du maximum de m et n
- chez les adultes il y a plutôt récupération directe en mémoire à long terme (MLT). Dans quelques cas le comptage intervient.
- ce modèle ne convient pas pour les doubles (récupérés en mémoire ?)

Il peut être encore utile de garder en mémoire les cinq catégories proposées par Baroody & Ginsburg (cité par Fayol)) ainsi que leur hiérarchisation:

1) comptage effectif (concrete counting all, CCA)
2) addition mentale: comptage effectif à partir du premier terme (Counting all starting with the first addend, CAF); somme à partir du premier terme (Counting on from the first addend, COF); comptage effectif à partir du terme maximum (Counting all starting with the larger term, CAL), somme à partir du terme maximum (Counting on from the larger term, COL).

La progression observée dans le développement des enfants est la suivante: d'abord CCA puis CAF ou COF (l'ordre des termes est respecté), puis CAL ou COL (commutativité en action)

Annexe 2: <u>Quelques protocoles issus de l'introspection</u>

Les étapes du calcul perçues par le calculateur font suite à l'énoncé. Entre crochets, apparaissent les nombres qui ne sont pas directement utilisés dans l'étape suivante ou obtenus "à part". Entre parenthèses figurent les opérations qui ont été vraisemblablement effectuées.

35 + 38 -> [60], 13 (5+8), 73

35 + 49 -> 50 (49+1), 84 (50 + 34)
35 + 49 -> 85 (50+35), 84 (85 - 1)
35 + 49 -> 80 (emprunt de 5 à 49 ou utilisation des deux nombres amis 35 45 ?), 84 (80+ 4)

142 + 99 -> 242 (142+100), 241 (242 - 1)

257 + 45 -> 262 (257+5), 302 (262 + 40)
257 + 45 -> [200], 102 (57+45 -> 52 + 50 mais le passage paraît plus diffus), 302
257 + 45 -> 200, 290 (57+45 -> 90 [+12]), 302

172 + 739 -> 800 (700+100), 900 (72+39 -> 100 + [2+9] ; attirance du 7 et du 3 ?), 911 (permutation du 2 et du 9 ?)
172 + 739 -> 800 (700+100), 900 (72+39 -> 102 + [9]), 911

172 + 239 -> 200 (170+30), 400 (200+200), 411 (400 + [9+2])

849 + 72 -> 910 (840+70), 921 (910 + [9+2])

389 + 597 -> 870 (méthode de fausse position !), 970 (870 + [100] retenu !), 986
389 + 597 -> 600 (emprunt de 3), 986 (600+386)

3150 + 6250 -> 9000, 9300, 9400

315 + 625 -> 900 (600+300), 930 (900 + [20+10]), 940 (930+[10])
315 + 625 -> 900 (600+300), 930 (900 + [25+5]), 940 (930+10)

246 + 782 -> 900 (700+200), 988 (900 + [82+6]), arrêt, 900, 1020 (900+[80+40]), 1028

238+514+189 -> 600 (500+100), 800 (600+200), [890] (800 + [89+1]), 51 (38+13), 900 (emprunt de 10 à 51), 941
238+514+189 -> [700] (500+200), 100 (89 et emprunt de 11 à 14), 938 (800+[100+38]), 941 (938+3)

655 + 203 + 142 -> [900] (600+200+100), 97 (55+42), 1000
655 + 203 + 142 -> 855, 858, 959, 960, 1000

990 + 455 -> 1455 (1000 + 455; compenser), 1445 (1455-10)

890 + 455 -> 1455, 1355 (-100), 1345 (-10) (proposé spontanément par flore)

Annexe 3: <u>Exemple de règles</u>

Exemple pour le choix de l'opérateur 'emprunter à' qui, par exemple, fait passer du calcul 27+54 à 30 + 51:

REGLE emprunter à N2
SI
    on a un calcul de la forme N1+N2 ET
    angulosité de N1 < 3 ET
    NOYAU = noyau proche de N1
    EMPRUNT = NOYAU - N1 ET
    chiffre significatif de EMPRUNT < 5 ET
    N2 > EMPRUNT
ALORS
    tenter d'appliquer l'opérateur 'emprunter à N2'

Ces opérateurs sont utilisés dans un processus de recherche classique (en profondeur d'abord). On utilise l'indice de difficulté pour tronquer l'arbre de recherche. Après ce choix, le calcul sera effectué (pour autant que la profondeur maximum de soit pas atteinte). A ce moment là, les contributions à la « charge cognitive » seront calculées:

DP = charge_processus(N1+EMPRUNT) + charge_processus(N2-EMPRUNT),
DM = charge_mémoire(N1+EMPRUNT) + charge_mémoire(N2-EMPRUNT),
DT = 2.

La recherche d'un noyau dans le système de calcul mental sera simplifiée en cherchant simplement l'arrondi supérieur. Les limitations concernant l'emprunt et l'angulosité sont aussi arbitraires, bien que réalistes. Avec des nombres trop compliqués le système se rabattra d'abord sur des procédures plus systématiques telles que celle donnée par l'algorithme de Bacquias.